

O primjeni diskontinuitetnih funkcija u statički konstrukcija

Riko Rosman

Ključne riječi

grede,
zid,
proračun konstrukcija,
diskontinuitetne funkcije,
unutarnje sile,
deformacije

Key words

beams,
wall,
structural analysis,
discontinuous functions,
internal forces,
strains

Mots clés

poutres,
mur,
calcul des constructions,
fonctions de discontinuité,
forces internes,
déformations

Ключевые слова

конструкция,
расчёт,
разрывные функции,
внутренние силы,
деформации

Schlüsselworte:

Balken, Wand,
Berechnung von
Konstruktionen,
Diskontinuitätsfunktionen,
Innenkräfte,
Verformungen

R. Rosman

Izvorni znanstveni rad

O primjeni diskontinuitetnih funkcija u statički konstrukcija

U radu je pokazano da se primjenom diskontinuitetnih funkcija mogu znatno pojednostaviti formulacije opterećenja i odzivnih veličina te izvodi za složena opterećenja štapova u statički konstrukcija. Dane su definicije i pravila računanja s diskontinuitetnim funkcijama, a praktična primjena je pokazana na nekoliko jednostavnih zadataka statički određenih i neodređenih greda te na zidu s nizom otvora izloženom gravitacijskom i bočnom opterećenju na proizvoljnom mjestu visine.

R. Rosman

Original scientific paper

On the use of discontinuous functions in the statics of structures

The author shows that the use of discontinuous functions may significantly simplify formulation of load and response values, as well as derivations for complex loading of beams in the statics of structures. Definitions and calculation rules with discontinuous functions are given, and the practical application is presented on several simple assignments involving statically determinate and indeterminate beams, and the wall with a number of openings exposed to gravity and lateral load at random height.

R. Rosman

Ouvrage scientifique original

De l'application des fonctions de discontinuité à la statique des constructions

L'article démontre que les fonctions de discontinuité permettent de simplifier considérablement les formules de la charge et des grandeurs de réponse, ainsi que les déductions des charges complexes des barres dans la statique des constructions. On fournit les définitions et les règles de calcul avec les fonctions de discontinuité, tandis que leur application pratique est montrée sur quelques problèmes simples des poutres statiquement déterminées et indéterminées, ainsi que d'un mur avec de nombreuses baies, exposé à un charge gravitationnelle et latérale à un point donné de la hauteur.

P. Росман

Оригинальная научная работа

O primenjenju razryvnykh funktsiy v statički konstruktsiy

V radu je pokazano, što primjenom razryvnykh funktsiy možno značajno uprostiti formulirovku nagruzok i otnovnykh veličin, a takzhe proizvodnye dlya slozhnykh nagruzok sterzheney v statički konstruktsiy. Dany definytsii i pravila rasčeta s razryvnykh funktsiyami, a praktično primenjenje pokazano na neskol'kikh prostykh primerykh statičeski opredelennykh i neopredelennykh balok, a takzhe na stenyakh s ryadom otverstiy, podverzhennykh gravitatsionnoy i bokovoy nagruzke na proizvol'nom meste vysoty.

R. Rosman

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

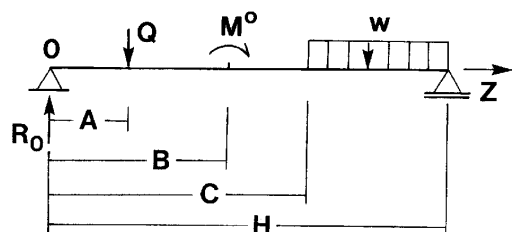
Über die Anwendung von Diskontinuitätsfunktionen in der Statik der Konstruktionen

Im Artikel wird gezeigt dass durch Anwendung von Diskontinuitätsfunktionen die Formulierungen der Belastung und der antwortenden Größen, sowie die Ableitungen für komplizierte Stabbelastungen erheblich vereinfacht werden können. Dargelegt sind Definitionen und Regeln für das Rechnen mit Diskontinuitätsfunktionen. Die praktische Anwendung zeigt man an einigen einfachen Aufgaben für statisch bestimmte und unbestimmte Balken, sowie an einer Wand mit einer Reihe von Öffnungen die Schwerkrafts- und seitlichen Belastungen ausgesetzt ist.

Autor: Akademik, prof. dr. sc. **Riko Rosman**, dipl. ing. građ., Šenoina 8, Zagreb

1 Uvod

Diskontinuitetne funkcije već se duže vremena primjenjuju u rješavanju zadataka električnih mreža i vibracija mehaničkih sustava. Ovdje će se pokazati kako se one mogu uspješno primijeniti i pri rješavanju zadataka statike konstrukcija [1].



Slika 1. Prosta greda izložena složenom bočnom opterećenju

Na slici 1. vidi se prosta greda izložena složenom bočnom opterećenju jednom koncentriranom silom, momentom i podijeljenim opterećenjem. Uz oznake Z za apscisu i R_0 za lijevu reakciju izrazi za moment savijanja u 4 područja grede glase

$$\begin{aligned} M_{0-A} &= R_0 Z, & (0 \leq Z \leq A) \\ M_{A-B} &= M_{0-A} - Q(Z - A), & (A \leq Z < B) \\ M_{B-C} &= M_{A-B} + M^0, & (B \leq Z \leq C) \\ M_{C-H} &= M_{B-C} - \frac{w}{2}(Z - C)^2. & (C \leq Z \leq H) \end{aligned} \quad (1)$$

Za svako od 4 područja grede moment savijanja je dakle dat posebnim izrazom. Analogno su i ostale odzivne veličine formulirane s 4 posebna izraza.

U nastavku će se pokazati kako se primjenom diskontinuitetnih funkcija opterećenje i odzivne veličine formuliraju jedinstvenim izrazima za cijelu dužinu grede. Time se zapisi i izvodi značajno pojednostavnjuju.

Diferencijalna jednadžba bočnog progiba $f = f(Z)$ grede savojne krutosti K izložene bočnom opterećenju intenziteta $q = q(Z)$ glasi

$$f'''' = \frac{q}{K}. \quad (2)$$

U svrhu rješenja te jednadžbe treba formulirati i 4 rubna uvjeta. Na primjer za ukliješteni kraj grede je $f = f' = 0$, za zglobno oslonjen kraj $f = f'' = 0$, a za slobodni kraj $f'' = f''' = 0$. Apostrofi naznačuju deriviranje po Z .

Pošto je rješenjem opisanog zadatka rubne vrijednosti utvrđena jednadžba progibne linije, postupnim deriviranjem po Z dobiju se nagib, moment savijanja i poprečna sila,

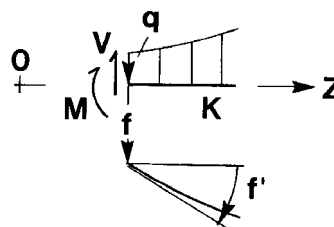
$$f', \quad M = -Kf'', \quad V = M', \quad (3)$$

a još jednim deriviranjem funkcija

$$q = -V' \quad (4)$$

intenziteta opterećenja grede, dakle polazna točka analize, što u svakom konkretnom slučaju može poslužiti kao kontrola.

Pozitivni predznaci opterećenja i odzivnih veličina vide se na slici 2.

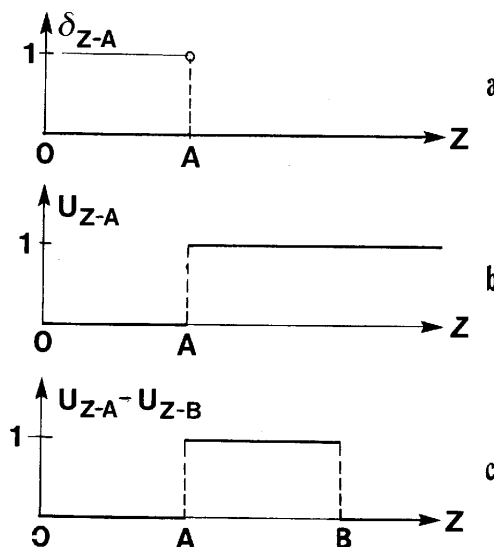


Slika 2. Opterećenje i odzivne veličine grede na mjestu Z

Nakon opisa diskontinuitetnih funkcija njihova praktična primjena pokazat će se najprije na dva elementarna zadatka grede, jednom statički određenom i jednom neodređenom, a onda na složenijem zadatku ukrotnog zida s regularnim vertikalnim nizom otvora.

2 Diskontinuitetne funkcije

Osnovne diskontinuitetne funkcije [2, 3] su funkcija jediničnog trenutnog impulsa ili Diracova delta funkcija (slika 3.a)



Slika 3. Diskontinuitetne funkcije: a) Diracova delta funkcija, b) funkcija jediničnog skoka, c) šeširasta funkcija

$$\delta_{Z-A} = \begin{cases} 0 & (Z \neq A) \\ 1 & (Z = A) \end{cases} \quad (5)$$

i funkcija jediničnog skoka ili Heavisideova funkcija (slika 3.b)

$$U_{Z-A} = \begin{cases} 0 & (Z < A) \\ 1 & (Z \geq A) \end{cases} \quad (6)$$

Pri tome proizvoljna vrijednost A apscise Z može biti i nula. U daljnjem će se ishodište apscise odabirati tako da u račun budu involvirane samo nenegativne Z -vrijednosti ($Z \geq 0$).

Kombiniranjem dviju funkcija jediničnog skoka dobije se funkcija jediničnog impulsa konačnog trajanja ili šesirasta funkcija (slika 3.c)

$$U_{Z-A} - U_{Z-B} = \begin{cases} 0 & (A > Z \geq B) \\ 1 & (A \leq Z < B) \end{cases} \quad (7)$$

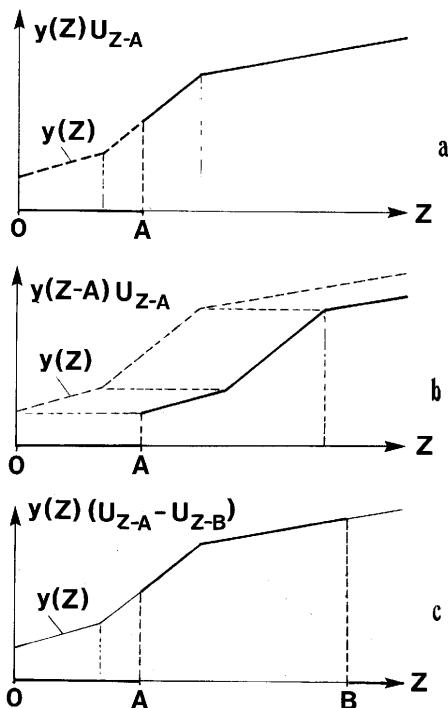
Primjenom Heavisideove funkcije za moment savijanja grede na slici 1. može se za cijelu dužinu grede zapisati jedinstveni izraz

$$M = R_0 Z - Q(Z-A)U_{Z-A} + M^0 U_{Z-B} - \frac{w}{2} (Z-C)^2 U_{Z-C} \quad (0 \leq Z \leq H) \quad (8)$$

Općenitije: ako je y_{0-A} izraz neke funkcije y za područje $0 \leq Z < A$, y_{B-A} njezin izraz za područje $A \leq Z < B$, y_{C-B} njezin izraz za područje $B \leq Z < C$, a y_{H-C} njezin izraz za područje $C \leq Z \leq H$, jedinstveni je izraz funkcije y za cijelo područje $(0, H)$

$$y = y_{0-A} + (y_{B-A} - y_{0-A}) U_{Z-A} + (y_{C-B} - y_{B-A}) U_{Z-B} + (y_{H-C} - y_{C-B}) U_{Z-C} \quad (9)$$

Dakako da navedeno pravilo vrijedi za proizvoljan broj diskontinuiteta.



Slika 4. Produktne funkcije a) $y(Z)U_{Z-A}$, b) $y(Z-A)U_{Z-A}$ i c) $y(Z)(U_{Z-A} - U_{Z-B})$

Produkt neke proizvoljne funkcije $y(Z)$ i funkcije U_{Z-A} jediničnog skoka (slika 4.a) jest

$$y(Z)U_{Z-A} = \begin{cases} 0 & (Z < A) \\ y(Z), & (Z \geq A) \end{cases} \quad (10)$$

efekt funkcije U_{Z-A} je dakle da funkciju $y(Z)$ "ukopča" pri $Z = A$.

Produkt funkcije $y(Z-A)$ i funkcije U_{Z-A} prikazan je na slici 4.b. Efekt je funkcije U_{Z-A} sada da funkciju $y(Z)$ pomakne udesno za A .

U produktu funkcije $y(Z)$ i šesiraste funkcije $U_{Z-A} - U_{Z-B}$ (slika 4.c) efekt je drugonavedene funkcije da poništi vrijednosti prvonavedene u području $A > Z > B$.

Pri utvrđivanju jednadžbi odzivnih veličina f' , M i V polazeći od jednadžbe progibne linije f treba derivirati, a pri utvrđivanju jednadžbi odzivnih veličina V , M , f' i f polazeći od jednadžbe intenziteta q opterećenja integrirati izraze koji sadrže diskontinuitetne funkcije. U svrhu olakšanja rada daje se tablica derivacija

$$\frac{d}{dZ} U_{Z-A} = \delta_{Z-A}, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dZ} [y(Z)U_{Z-A}] = \begin{cases} 0 & (Z < A) \\ \frac{dy(Z)}{dZ}, & (Z \geq A) \end{cases} \quad (12)$$

$$\frac{d}{dZ} (Z-A)U_{Z-A} = 1, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dZ} [(Z-A)^2 U_{Z-A}] = 2(Z-A)U_{Z-A}, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dZ} [(Z-A)^3 U_{Z-A}] = 3(Z-A)^2 U_{Z-A}, \quad (15)$$

i tablica integrala

$$\int \delta_{Z-A} dZ = U_{Z-A} + C \quad (16)$$

$$\int U_{Z-A} dZ = (Z-A)U_{Z-A} + C, \quad (17)$$

$$\int (Z-A)U_{Z-A} dZ = \frac{(Z-A)^2}{2} U_{Z-A} + C, \quad (18)$$

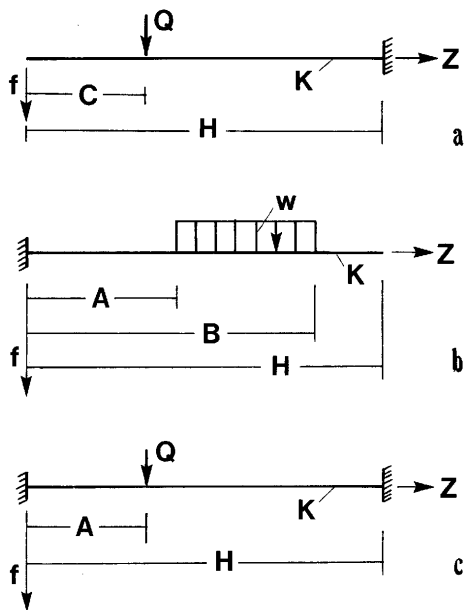
$$\int (Z-A)^2 U_{Z-A} dZ = \frac{(Z-A)^3}{3} U_{Z-A} + C, \quad (19)$$

gdje su C integracijske konstante koje treba odrediti iz rubnih uvjeta.

3 Progibna linija konzole izložene bočnom opterećenju

3.1 Utjecaj koncentrirane sile

Konzola savojne krutosti K opterećena je koncentriranom silom (slika 5.a). Zadaća utvrđivanja progibne linije jednoznačno je opisana funkcijom intenziteta opterećenja



Slika 5. Grede: a) konzola s koncentriranom silom, b) konzola s podijeljenim opterećenjem duž dijela svog raspona i c) obostrano upeta gređa s koncentriranom silom

$$q = Q \delta_{z-c} \quad (20)$$

te rubnim uvjetima

$$f_0'' = 0, \quad f_0''' = 0, \quad f_H = 0, \quad f_H' = 0. \quad (21)$$

Primijeni li se metoda Laplaceovih transformacija [2, 3], opće je rješenje diferencijalne jednačbe (2) progibne linije

$$f = f_0 + f_0'Z + f_0'' \frac{Z^2}{2} + f_0''' \frac{Z^3}{6} + \frac{1}{K} L^{-1} \left[\frac{L(q)}{s^4} \right] \quad (22)$$

Pri tome je L Laplaceov operator, $L(q)$ preslika funkcije q u s -područje. L^{-1} inverzni Laplaceov operator a $L^{-1}[L(q)/s^4]$ povratna preslika kvocijenta $L(q)/s^4$ u Z -područje; s je pomoćna varijabla koja se pojavljuje pri transformaciji i nestaje pri povratnoj transformaciji.

Na osnovi pravila i tabele parova korespondentnih funkcija metode Laplaceovih transformacija jest, uz oznaku e za Eulerov broj,

$$L(q) = Qe^{-Cs}, \quad L^{-1} \left[\frac{L(q)}{s^4} \right] = Q \frac{(Z-C)^3}{6} U_{Z-C}, \quad (23)$$

pa jednačba (22), uzevši u obzir prva dva rubna uvjeta, poprima oblik

$$f = f_0 + f_0'Z + \frac{Q}{K} \frac{(Z-C)^3}{6} U_{Z-C}. \quad (24)$$

Nepoznate vrijednosti progiba f_0 i nagiba f_0' kraja konzole ($Z = 0$) u jednačbi (24) odrede se na osnovi trećeg i četvrtog rubnog uvjeta (jednačba (21)),

$$f_0 = (2H + C)(H - C)^2 \frac{Q}{6K}, \quad f_0' = -(H - C)^2 \frac{Q}{2K}. \quad (25)$$

Time jednačba progibne linije, ako se još uvedu bezdimenzijske apscise $z = Z/H$ i $c = C/H$, prima konačni oblik

$$f = \left[(2 + c - 3z)(1 - c)^2 + (z - c)^3 U_{z-c} \right] \frac{QH^3}{6K} \quad (26)$$

Za progib slobodnog kraja ($z = 0$) konzole i progib ispod napadne sile ($z = c$) jednačba (26) daje

$$f_0 = (2 - 3c + c^3) \frac{QH^3}{6K}, \quad f_c = (1 - c)^3 \frac{QH^3}{6K}. \quad (27)$$

Postupnim deriviranjem jednačbe (26) po z sada se lako mogu odrediti jednačbe nagiba, momenta savijanja i poprečne sile grede.

3.2 Utjecaj podijeljenog opterećenja na dijelu dužine konzole

Za konzolu izloženu jednoliko podijeljenom opterećenju intenziteta w duž dijela njezina raspona (slika 5.b) je

$$q = w(U_{z-A} - U_{z-B}), \quad (28)$$

pa se, analogno izvodima u 3.1, uz primjenu bezdimenzijskih apscisa $a = A/H$ i $b = B/H$, dobije

$$f = \left[(b - a)(6b + 6a - 4z)z^2 + (z - a)^4 U_{z-a} - (z - b)^4 U_{z-b} \right] \frac{wH^4}{24K} \quad (29)$$

Za posebni slučaj opterećenja duž cijelog raspona ($A = 0$, $B = H$) opća jednačba za slobodni kraj konzole daje poznati rezultat $f_H = wH^4/(8K)$.

4 Odzivne veličine obostrano upete grede izložene koncentriranoj bočnoj sili

Statički neodređena zadaća obostrano upete grede savojne krutosti K izložene koncentriranoj sili Q na mjestu A (slika 5.c) jednoznačno je formulirana funkcijom intenziteta opterećenja

$$q = Q \delta_{z-A} \quad (30)$$

te rubnim uvjetima

$$f_0 = 0, \quad f_0' = 0, \quad f_H = 0, \quad f_H' = 0. \quad (31)$$

Primjenom metode Laplaceovih transformacija i uzevši u obzir prva dva rubna uvjeta, sada se umjesto jedn. (24) dobiva

$$f = f_0'' \frac{Z^2}{2} + f_0''' \frac{Z^3}{6} + \frac{Q}{K} \frac{(Z-A)^3}{6} U_{Z-A}. \quad (32)$$

Nepoznate vrijednosti f_0'' i f_0''' u jedn. (32) odrede se na osnovi trećeg i četvrtog rubnog uvjeta (jedn. (31)),

$$f_0'' = a(1 - a)^2 \frac{QH}{K}, \quad f_0''' = -(1 + 2a)(1 - a)^2 \frac{Q}{K}, \quad (33)$$

pa jednačba progibne linije konačno glasi

$$f = \left\{ (1-a)^2 [3a - (1+2a)z] z^2 + (z-a)^3 U_{z-a} \right\} \frac{QH^3}{6K}. \quad (34)$$

Za moment savijanja i poprečnu silu grede dobije se primjenom jednačbe (3), pravila deriviranja i relacije $df/(dZ) = df/(dz) \cdot 1/H$,

$$M = \left[(1+2a)(1-a)^2 z - a(1-a)^2 - (z-a)U_{z-a} \right] QH, \quad (35)$$

$$V = \left[(1+2a)(1-a)^2 - U_{z-a} \right] Q. \quad (36)$$

Algoritam analize je dakle u statički neodređenog sustava isti kao u statički određenog sustava.

Karakteristične su vrijednosti odzivnih veličina, dakle progib ispod sile, momenti uklještenja i moment savijanja ispod sile te poprečne sile s jedne i druge strane sile,

$$f_A = [a(1-a)]^3 \frac{QH^3}{3K}, \quad (37)$$

$$M_0 = -a(1-a)^2 QH, \quad M_A = 2a^2(1-a)^2 QH,$$

$$M_H = -a^2(1-a)QH, \quad (38)$$

$$V_0 = (1+2a)(1-a)^2 Q,$$

$$V_H = [(1+2a)(1-a)^2 - 1] Q. \quad (39)$$

Za poseban slučaj kada napadna sila djeluje u trećinki raspona ($A = H/3$), opće jednačbe daju

$$f_A = \frac{8}{2187} \frac{QH^3}{K}, \quad (40)$$

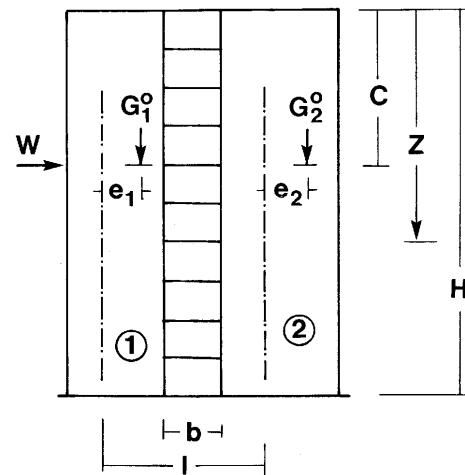
$$M_0 = -\frac{4}{27} QH, \quad M_A = \frac{8}{81} QH, \quad M_H = -\frac{2}{27} QH, \quad (41)$$

$$V_0 = \frac{20}{27} Q, \quad V_H = -\frac{7}{27} Q. \quad (42)$$

5 Ukutni zid oslabljen nizom otvora s dodatnim koncentriranim masama na proizvoljnoj koti

5.1 Parametri sustava, opterećenje i osnovni sustav

Na slici 6. vidi se zid od dva stupca, 1 i 2, te spojnog posmičnog medija prikazanog lamelama u infinitezimalnom međusobnom razmaku. Medij simulira prečke u konačnom međusobnom razmaku između otvora za vrata ili prozore. Ležajni uvjeti zida na njegovu gornjem i donjem kraju mogu biti proizvoljni. Na vrhu zid je često slobodan ili je ukrućen nekom vrstom završne konstrukcije, a na donjem je obično upet u kruti temelj ili podrumsku konstrukciju ili je, npr. u slučaju raščlanjenog prizemlja, oslonjen na više-manje podatljivu ležajnu konstrukciju.



Slika6. Zid s nizom otvora izložen gravitacijskim silama i bočnoj sili na koti C

Kako je odziv na utjecaje standardnih gravitacijskih i bočnih opterećenja već utvrđen [4, 5, 6], ovdje će se istražiti utjecaj koncentriranih masa na proizvoljnoj koti zida, pa će se izvesti obrasci za odziv na odnosne gravitacijske sile te na bočnu silu, npr. seizmičku silu koja u slučaju pobuda tla odgovara navedenim masama.

Oznake:

H	visina zida
b	širina medija, dakle svijetli raspon prečaka
l	osna udaljenost stupaca
K_1, K_2	vlastite savojne krutosti stupaca
K	vlastita savojna krutost poprečnog presjeka zida
D_1, D_2	osne krutosti stupaca,
K_D	osno-savojna krutost poprečnog presjeka zida
d	osna udaljenost prečaka, dakle visina kata
\bar{K}	savojna krutost poprečnog presjeka jedne prečke reducirana zbog utjecaja smicanja
S	posmična krutost medija po jedinici visine zida,
Z	kota usmjerena od vrha zida naniže
G_1^0, G_2^0	vertikalne sile stupaca 1 odnosno 2
e_1, e_2	ekscentriciteti sila G_1^0, G_2^0 s obzirom na os odnosnog stupca
C	kota opterećenja.

Na osnovi teorije zida s nizom otvora [5, 6] krutosti su poprečnih presjeka njegovih elemenata

$$K = K_1 + K_2, \quad (\text{sila} \cdot \text{dužina}^2) \quad (43)$$

$$K_D = \frac{l^2}{\frac{1}{D} + \frac{1}{D_2}} \quad (\text{sila} \cdot \text{dužina}^2) \quad (44)$$

$$S = \frac{12\bar{K}}{db^3}, \quad (\text{sila/dužina}^2) \quad (45)$$

a bezdimenzijski su parametri zida

$$A = H \sqrt{\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K_D}\right) S l^2}, \quad B = \frac{1}{1 + \frac{K}{K_D}}. \quad (46)$$

Parametar B uvodi u račun utjecaj izduženja stupaca. Ako zid nije vrlo vitak može se staviti $B = 1$.

Sustav je statički neodređen. Osnovni sustav dobije se uvođenjem nul-polja poprečne sile u sve lamele u položištu njihova raspona. Vertikalna posmična sila koja duž tih nul-polja djeluje, na lijevi dio sustava naviše a na desni naniže, jest hiperstatička veličina $T = T(Z)$. Njezina je derivacija po koti tijekom smicanja $T' = T'(Z)$.

U daljnjem se pretpostavlja da je zid na gornjem kraju slobodan, da dakle deformacija najviše lamele nije omećena nekim konstruktivnim elementom iznad zida, a na donjem upet u krutu temeljnu ili podrumsku konstrukciju tako da se najniža lamela ne može deformirati. Rubni su uvjeti funkcije T time

$$T_0 = 0, \quad T_H' = 0. \quad (47)$$

5. 2 Utjecaj gravitacijskog opterećenja

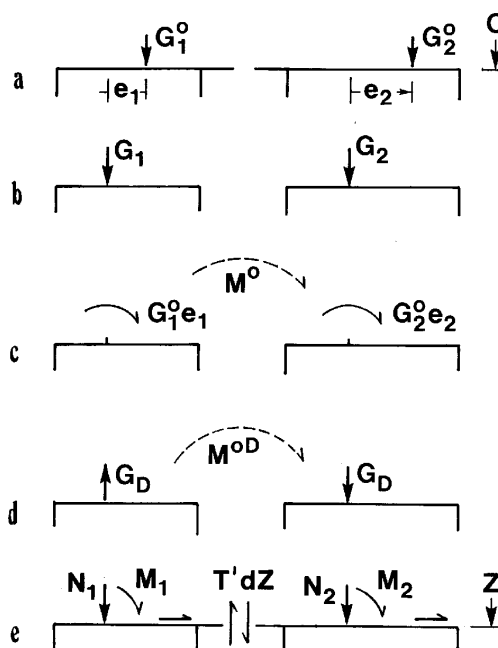
U svrhu pojednostavnjenja analize gravitacijsko se opterećenje zida na koti C (slika 7.a) rastavi u tri komponente: 1) par osnih sila G_1 i G_2 (slika 7.b) koje uzrokuju samo vertikalno izduženje zida, skraćenje, dakle bezsavojno naponsko stanje, 2) par $G_1^o e_1$ i $G_2^o e_2$ momenata savijanja stupaca 1 odnosno 2 (slika 7.c), dakle ukupno konzolni moment savijanja M^o zida i 3) par osnih sila G_D stupaca (slika 7.d) koji daje konzolni moment savijanja M^{oD} zida.

Lako se može pokazati da je

$$G_1 = \frac{D_1}{D_1 + D_2} (G_1^o + G_2^o), \quad G_2 = \frac{D_2}{D_1 + D_2} (G_1^o + G_2^o), \quad (48)$$

$$M^o = G_1^o e_1 + G_2^o e_2, \quad M^{oD} = \frac{l}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}} \left(\frac{G_2^o}{D_2} - \frac{G_1^o}{D_1} \right), \quad (49)$$

Pod utjecajem opterećenja i hiperstatičke veličine T na poprečne presjeka stupaca na proizvoljnoj koti Z djeluju uzdužne sile N_1 odnosno N_2 te momenti savijanja M_1 odnosno M_2 . Poprečne sile stupaca ovdje se ne izračunavaju jer uglavnom nisu značajne pri dizanju zida. Poprečna je sila lamele na promatranoj koti $T' dZ$. Navedene rezne sile i njihova pozitivna orijentacija vide se na slici 7.e.



Slika 7. a) Gravitacijsko opterećenje zida na koti C i b), c), d) njegove tri komponente

Metodom sila ili principom o stacionarnoj vrijednosti komplementarne energije može se, slično kao u [5, 6] za standardna opterećenja i uz primjenu diskontinuitetne funkcije U (jedn. (6)), pokazati da je diferencijalna jednadžba hiperstatičke veličine

$$-\frac{T''}{S} + \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K_D}\right) l^2 T = \left(\frac{l}{K} M^o + \frac{G_1^o}{D_1} - \frac{G_2^o}{D_2}\right) U_{Z-C}. \quad (50)$$

Radi pojednostavnjenja i bolje preglednosti daljnje analize uvedu se bezdimenzijske kote $z = Z/H$ i time $c = C/H$, a hiperstatička veličina izrazi se kao produkt njezina bezdimenzijskog koeficijenta $t = t(z)$ i referentne vrijednosti T^o , $T = tT^o$, (51)

$$T^o = \frac{\frac{l}{K} M^o + \frac{G_1^o}{D_1} - \frac{G_2^o}{D_2}}{\frac{l^2}{K} + \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}}. \quad (52)$$

Lako se može pokazati da je T^o vrijednost sile T u odgovarajućem graničnom sustavu s nedeformabilnim medijem i opterećenjem na vrhu zida ($S = \infty, C = 0$). Dalje je

$$T' = t' \frac{T^o}{H}, \quad (53)$$

a $t' = t'(z) = dt/(dz)$ bezdimenzijski koeficijent tijekom smicanja T' .

Uz primjenu jedn. (50) – (52) analizirani zadatak rubne vrijednosti opisan je jednadžbama

$$t'' - A^2 t + A^2 U_{z-c} = 0 \quad (54)$$

$$t_0 = 0, t'_1 = 0 \quad (55)$$

Indeksi odzivnih veličina prikazuju odnosnu kotu, a indeksi njihovih bezdimenzijskih koeficijenata odnosno bezdimenzijsku kotu.

U svrhu rješenja zadatka ponovno se primijeni metoda Laplaceovih transformacija.

Uzevši u obzir prvi rubni uvjet, Laplaceova transformacija tražene funkcije t , dakle njezina preslika u s -područje, jest

$$\bar{t} = \frac{t'_0}{s^2 - A^2} - \frac{A^2 e^{-cs}}{s(s^2 - A^2)}, \quad (56)$$

a povratna je preslika te preslike u z -područje

$$t = t'_0 \frac{shAz}{A} + [1 - ch(Az - Ac)] U_{z-c}. \quad (57)$$

Pri tome sh i ch označuju hiperbolne funkcije. Da bi se odredila još nepoznata vrijednost nagiba t -linije na vrhu zida primjenjuje se drugi rubni uvjet, dakle uvjet da je koeficijent tijeka smicanja na donjem kraju zida jednak nuli. Dobije se

$$t'_0 = A \frac{sh(A - Ac)}{chA}, \quad (58)$$

pa je konačno

$$t = \frac{sh(A - Ac)}{chA} shAz + [1 - ch(Az - Ac)] U_{z-c}, \quad (59)$$

$$t' = A \left[\frac{sh(A - Ac)}{chA} chAz - sh(Az - Ac) U_{z-c} \right]. \quad (60)$$

Ekstremne su i karakteristične vrijednosti sila T i T' određene odgovarajućim vrijednostima njihovih koeficijenata,

$$\max t = t_1 = 1 - \frac{chAc}{chA}, \quad t_c = \frac{sh(A - Ac)}{chA} shAc, \quad (61)$$

$$t'_0 = A \frac{sh(A - Ac)}{chA}, \quad \max t' = t'_c = A \frac{sh(A - Ac)}{chA} chAc \quad (62)$$

Time je

$$\max T = T_H = t_1 T^o, \quad T_C = t_c T^o, \quad (63)$$

$$T'_0 = t'_0 \frac{T^o}{H}, \quad \max T' = T'_C = t'_c \frac{T^o}{H}. \quad (64)$$

Momenti su savijanja stupaca na proizvoljnoj koti

$$M_1 = \frac{K_1}{K} M, \quad M_2 = \frac{K_2}{K} M, \quad (65)$$

gdje je

$$M = m M^o, \quad m = U_{z-c} - t \frac{l T^o}{M^o}. \quad (66)$$

Sa M označen je sumarni moment savijanja obaju stupaca, a m je njegov bezdimenzijski koeficijent. Uzdužne su sile stupaca

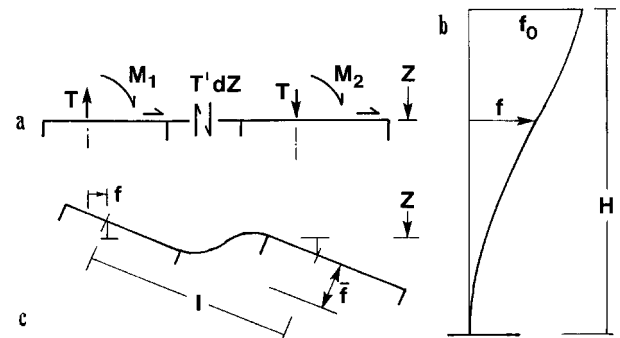
$$N_1 = G_1 U_{z-c} - t T^o, \quad N_2 = G_2 U_{z-c} + t T^o. \quad (67)$$

Ekstremne vrijednosti pojavljuju se, dakako, na donjem kraju zida.

Deformacije zbog gravitacijskog opterećenja su uglavnom male pa se ne istražuju.

5.3 Utjecaj bočnog opterećenja

Analizira se utjecaj horizontalne sile W na koti C . Na slici 8.a prikazane su unutarnje sile na proizvoljnoj koti Z , a na slici 8.b linija bočnih pomaka zida.



Slika 8. a) Rezne sile na koti Z , b) linija bočnih pomaka zida na koti Z zbog bočnog opterećenja na koti C i c) deformacija poprečnog presjeka zida na koti Z zbog bočnog opterećenja na koti C

U diferencijalnoj jednadžbi hiperstatičke veličine za utjecaj gravitacijskog opterećenja (jedn. (50)) sada se mijenja samo apsolutni član, član zavisn od opterećenja, pa je

$$-\frac{T''}{S} + \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K_D} \right) l^2 T = \frac{l}{K} W(Z - C) U_{z-c}. \quad (68)$$

Opet se uvedu bezdimenzijske kote z i c , a T se izrazi kao produkt bezdimenzijskog koeficijenta $t = t(z)$ i referentne vrijednosti T^o sile T ,

$$T = t T^o, \quad (69)$$

$$T^o = B \frac{WH}{l}. \quad (70)$$

Lako se može pokazati da je T^o vrijednost sile T odgovarajućeg zida s nedeformabilnim medijem i opterećenjem na vrhu zida ($S = \infty$, $C = 0$). Tijek je smicanja

$$T' = t' \frac{T^o}{H}, \quad (71)$$

a $t' = dt/(dz)$ odnosni bezdimenzijski koeficijent.

Uz primjenu jedn. (69) – (71) formulacija postavljenog zadatka glasi

$$t'' - A^2 t + A^2(z-c)U_{z-c} = 0, \quad (72)$$

$$t_0 = 0, \quad t'_1 = 0. \quad (73)$$

Uzevši u obzir prvi rubni uvjet Laplaceova je transformacija tražene funkcije t , njezina preslika u s -područje,

$$\bar{t} = \frac{t'_0}{s^2 - A^2} - A^2 \frac{e^{-cs}}{s^2(s^2 - A^2)}, \quad (74)$$

a povratna preslika te preslike u z -područje

$$t = t'_0 \frac{shAz}{A} + \left[z - c - \frac{sh(Az - Ac)}{A} \right] U_{z-c}. \quad (75)$$

Još nepoznata vrijednost t' -linije na vrhu zida odredi se iz drugoga rubnog uvjeta,

$$t'_0 = \frac{ch(A - Ac) - 1}{chA}, \quad (76)$$

pa konačni izrazi za bezdimenzijske koeficijente t hiperstatičke veličine i t' odnosnog tijeka smicanja glase

$$t = \frac{ch(A - Ac) - 1}{AchA} shAz + \left[z - c - \frac{sh(Az - Ac)}{A} \right] U_{z-c}, \quad (77)$$

$$t' = \frac{ch(A - Ac) - 1}{chA} chAz + [1 - ch(Az - Ac)] U_{z-c}. \quad (78)$$

Ekstremne su i karakteristične vrijednosti sila T i T' određene odgovarajućim vrijednostima njihovih koeficijenata,

$$\max t = t_1 = 1 - c + \frac{1}{A} \left(\frac{shAc}{chA} - thA \right), \quad (79)$$

$$t_c = \frac{ch(A - Ac) - 1}{AchA} shAc, \quad (80)$$

$$t'_0 = \frac{ch(A - Ac) - 1}{chA}, \quad t'_c = \frac{ch(A - Ac) - 1}{chA} chAc \quad (81)$$

Time je

$$\max T = T_H = t_1 T^0, \quad T_C = t_c T^0, \quad (82)$$

$$T'_0 = t'_0 \frac{T^0}{H}, \quad \max T' = T'_C = t'_c \frac{T^0}{H}, \quad (83)$$

$$M = [(z - c)U_{z-c} - Bt] WH, \quad (84)$$

$$\max M_1 = M_{1H} = \frac{K_1}{K} (1 - c - Bt_1) WH,$$

$$\max M_2 = M_{2H} = \frac{K_2}{K} (1 - c - Bt_1) WH. \quad (85)$$

LITERATURA

- [1] Higdon, A.: *Mechanics of Materials*, Wiley, New York, 1978.
- [2] Kreyszig, E.: *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, New York, 1999.
- [3] Harris, J., Stocker, H.: *Handbook of Mathematics and Computational Science*, Springer, New York, 1998.
- [4] Rosman, R.: *O statičkom djelovanju nosivih poprečnih zidova višekatnih zgrada*, Građevinar 11 (1959) 4, 241–248.

Bočni pomaci f zida suma su doprinosa f^o odgovarajućeg zida s nedeformabilnim medijem i doprinosa deformacije medija [7],

$$f = f^o + \frac{1}{\left(1 + \frac{K}{K_D}\right)Sl} (T_H - T), \quad (86)$$

gdje je

$$f^o = \left[(2 + c - 3z)(1 - c)^2 + (z - c)^3 U_{z-c} \right] \frac{QH^3}{6(K + K_D)}. \quad (87)$$

Progib je maksimalan na vrhu zida ($Z = z = 0, T_0 = 0$),

$$f_0 = f^o_0 + \frac{1}{\left(1 + \frac{K}{K_D}\right)Sl} T_H, \quad (88)$$

gdje je

$$f^o_0 = (2 - 3c + c^3) \frac{QH^3}{6(K + K_D)}. \quad (89)$$

Deformacija lamela (slika 8.c), i time prečaka jest na osnovi definicije krutosti S

$$\bar{f} = \frac{T'}{S}, \quad (90)$$

a maksimalna je na koti hvatišta sile ($Z = C$).

6 Zaključak

U radu je pokazano da se primjenom diskontinuitetnih funkcija mogu znatno pojednostavniti formulacije opterećenja i odzivnih veličina te izvodi u statici konstrukcija. Nakon definicija i opisa osnovnih diskontinuitetnih funkcija dani su obrasci za derivacije i integrale izraza koji sadrže diskontinuitetne funkcije. Praktična primjena pokazana je najprije na elementarnim zadacima greda, jednoj statički određenoj i jednoj neodređenoj, pa se pokazalo da je algoritam analize u oba slučaja isti. Onda je analiziran složeniji zadatak ukrutnog zida s nizom otvora na osnovi zamjenjujućega kontinuiranog medija izloženoga gravitacijskom i bočnom opterećenju na proizvoljnom mjestu svoje visine. Pri tome se je zbog velikog broja parametara zida i opterećenja odustalo od izrade parametarskih studija, to više što relativno jednostavni obrasci omogućuju lako utvrđivanje svih mjerodavnih odzivnih veličina u svakom konkretnom zadatku.

- [5] Rosman, R.: *Statik und Dynamik der Scheibensysteme des Hochbaues*, Springer, Berlin, 1968.
- [6] Rosman, R.: *Berechnung gekoppelter Stützensysteme im Hochbau*, 2. Auflage. Ernst & Sohn, Berlin, 1875.
- [7] Rosman, R.: *Beitrag zur Berechnung gekoppelter Stützensysteme*, Beton- und Stahlbetonbau 90 (1995), 273–276, 312–315.