UDK 624.074.4:666.972 *Primljeno 25. 5. 2002.*

Proračun betonskih ljusaka s uključenjem reoloških svojstava betona

Jure Radnić, Domagoj Matešan

Ključne riječi

betonska ljuska, reološka svojstva betona, statičko opterećenje, model, materijalna i geometrijska nelinearnost

J. Radnić, D. Matešan *Izvorni znanstveni rad*

Proračun betonskih ljusaka s uključenjem reoloških svojstava betona

Prikazan je model i razvijeni software za proračun betonskih ploča i ljusaka opterećenih dugotrajnim statičkim opterećenjem. Simulirana je materijalna i geometrijska nelinearnost. Modelirano je puzanje, skupljanje i starenje betona, tečenje betona u tlaku, otvaranje i zatvaranje pukotina u vlaku te vlačna i posmična krutost puknutog betona. Modelirano je i nelinearno ponašanje armature. Primjer ilustrira točnost i neke mogućnosti primjene modela i proračunskog programa VALJ.

Key words

concrete shell, rheological properties of concrete, statical load, model, material and geometrical nonlinearity

J. Radnić, D. Matešan *Original scientific paper*

Concrete shell computation with determination of rheological properties of concrete

The model and software for the computation of concrete slabs and shells exposed to a prolonged static load is presented. The material and geometrical nonlinearity is simulated. The following features are modeled: creep, shrinkage and aging of concrete, concrete flow under pressure, opening and closing of cracks subjected to tensile stress, and tensile and shear stiffness of cracked concrete. The nonlinear behavior of steel reinforcement is also modeled. The example shown illustrates the accuracy and some possible uses of the VALJ model and computational software.

Mots clés

voile en béton, propriétés rhéologiques du béton, charge statique, modèle, non-linéarité matérielle et géométrique

J. Radnić, D. Matešan *Ouvrage scientifique original*

Calcul des voiles en béton compte tenu des propriétés rhéologiques du béton

L'article présente le modèle et le logiciel développé pour le calcul des dalles et des voiles en béton soumis à une charge statique de longue durée. La non-linéarité matérielle et géométrique a été simulée. On a modélisé le fluage, le retrait et le vieillissement du béton, l'écoulement du béton en compression, l'ouverture et la fermeture des fissures en traction, ainsi que la rigidité de traction et de cisaillement du béton ayant subi la rupture. Le comportement non-linéaire de l'armature a également été modélisé. L'exemple fourni illustre la précision et certaines possibilités d'application du modèle et du logiciel VALJ.

Ключевые слова

бетонная оболочка, реологические свойства бетона, статическая нагрузка, модель, материальная и геометрическая нелинейность

Й. Раднич, Д. Матешан *Оригинальная научная работа*

Расчёт бетонных оболочек с включением реологических свойств бетона

В работе показана модель и развитый софтвер для расчёта бетонных плит и оболочек, нагружённых длительной статической нагрузкой. Симулирована материальная и геометрическая нелинейность. Моделированы ползучесть, усадка и старение бетона, течение бетона под давлением, открытие и закрытие трещин при растяжении, а также жёсткость при растяжении и сдвиге растресканного бетона. Моделировано и нелинейное поведение арматуры. Пример иллюстрирует точность и некоторые возможности применения модели и расчётной программы VALJ.

Schlüsselworte:

Betonschale, rheologische Eigenschaften des Betons, statische Belastung, Modell, materielle und geometrische Unlinearität

J. Radnić, D. Matešan *Wissenschaftlicher Originalbeitrag*

Berechnung von Betonschalen unter Einrechnung der rheologischen Eigenschaften des Betons

Dargestellt ist das Modell und das entwickelte Software für die Berechnung von Betonplatten und -schalen, belastet durch lang andauernde statische Belastung. Simuliert ist materielle und geometrische Unlinearität. Modelliert sind Kriechen, Schwinden und Altern des Betons, Fliessen des Betons bei Druck, öffnen und schliessen der Risse bei Zug, sowie Zug- und Schersteifigkeit des geborstenen Betons. Auch das unlineare Verhalten der Bewehrung ist modelliert. Das Beispiel illustriert die Genauigkeit und einige Anwendungsmöglichkeiten des Modells und des Berechnungsprogramms VALJ.

Autori: Prof. dr. sc. **Jure Radnić**, dipl. ing. građ., Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Matice hrvatske 15; mr. sc. **Domagoj Matešan**, dipl. ing. građ., IGH Zagreb, Poslovni centar Split, Matice hrvatske 15, Split

1 Uvod

U pokušaju razvoja numeričkih modela za što realniju simulaciju ponašanja betonskih ljusaka (nearmiranih, klasično armirani i prednapetih), u radu [20] izložen je model za statičku analizu ljusaka opterećenih kratkotrajnim statičkim opterećenjem, a u radu [21] model za dinamičku analizu ljusaka. U ovom je radu izložen model za statičku analizu ljusaka izloženih dugotrajnom opterećenju, s mogućnošću simulacije utjecaja reoloških osobina betona. Kako je niz proračunskih rješenja zajednički za sva tri prethodno navedena modela, to se oni opisani u radovima [20] i [21] ovdje se neće ponavljati, a oni koji su zbog preglednosti rada i navedeni samo su sažeto opisani.

Ovdje će se detaljnije opisati samo specifičnosti koje se odnose na modeliranje vremenskih efekata betona, dok se ostale pojedinosti usvojenog modela ljusaka mogu naći u radovima [12], [14], [20] i [21].

2 Osnovne pretpostavke

Vremenski utjecaji betona značajni su za naponsko-deformacijsko stanje nearmiranih, armiranih, prednapetih i spregnutih betonskih konstrukcija, odnosno svih konstrukcija koje su djelomično ili u cijelosti izgrađene iz betona. Oni su osobito izraženi kod vitkih tlačnih elemenata, te u slučajevima visokih naprezanja betona. Oni izazivaju preraspodjelu naprezanja, odnosno mijenjaju sliku unutrašnjih sila, te povećavaju deformacije tijekom vremena. Ako se želi dobiti što realnija slika naponsko-deformacijskog stanja za uporabna opterećenja te granična stanja nužne je uzeti u obzir vremenske utjecaje betona.

Pod vremenskim utjecajima betona ovdje će se podrazumijevati: puzanje, skupljanje, starenje i temperaturne promjene.

Puzanje betona je vremensko povećanje trenutne deformacije betona pod konstantnim naprezanjem. Ono može biti nekoliko puta veće od trenutne deformacije betona. Skupljanje je promjena volumena koja se događa nezavisno od naprezanja i temperaturnih promjena i odvojeno je od puzanja betona. Starenje se može definirati kao smanjenje mehaničke deformacije zbog povećanja čvrstoće i modula elastičnosti betona tijekom vremena. Temperaturne promjene također mijenjaju naponsko-deformacijsko stanje betonske konstrukcije.

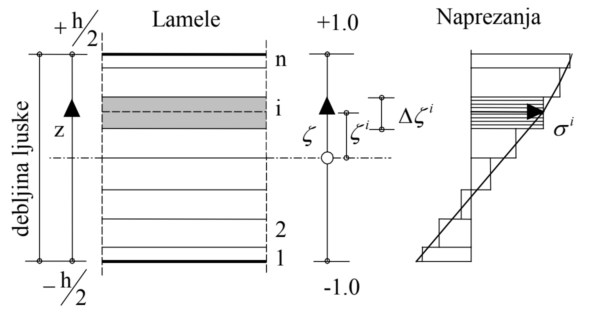
Ovdje će se prikazati samo jedan numerički model za uključenje reoloških osobina betona pod dugotrajnim opterećenjem. Model se temelji na onome izloženom u radu [20] za simulaciju betonskih i armiranobetonskih ljusaka opterećenih kratkotrajnim statičkim opterećenjem. Izloženi model simulacije obuhvaća bitne nelinearne efekte ponašanja betonskih konstrukcija, kao što su:

- utjecaj promjene geometrije (veliki pomaci)
- nelinearno ponašanje betona:
  - tečenje i drobljenje u tlaku
  - otvaranje i zatvaranje pukotina
  - vlačnu krutost između pukotina
  - posmičnu krutost ispucanog betona
  - puzanje
  - skupljanje
  - starenje
  - temperaturne promjene
- nelinearno ponašanje armature
  - tečenje u vlaku i tlaku
  - ojačanje u tlaku i vlaku
  - temperaturne promjene
- utjecaj građenja/nastajanja konstrukcije u vremenu.

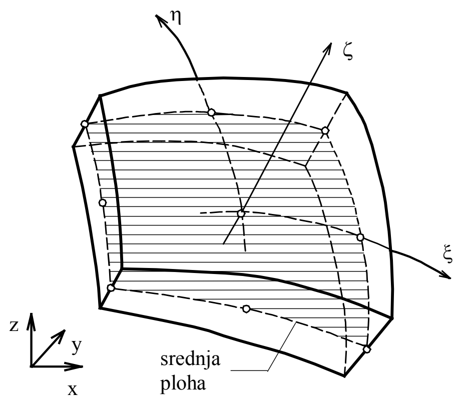
Na temelju izloženog modela, razvijen je proračunski program VALJ za vremensku analizu betonskih ljusaka. Verifikacija modela provedena je na eksperimentalno ispitanoj armiranobetonskoj gredi.

3 Usvojeni element ljuske

Formulacija efikasnoga konačnog elementa ljuske još uvijek nije potpuno riješena. Naime, još uvijek nije razvijen takav element koji precizno opisuje stvarno ponašanje konstrukcije i nema nikakvih drugih nedostataka. Degenerirani element ljuske temeljen na trodimenzionalnoj teoriji kontinuuma danas ima najrašireniju primjenu. Usvojeni degenerirani konačni element ljuske [14] oslobođen je negativnih utjecaja tzv. posmičnog i membranskog *locking-a*. Može se efikasno koristiti za tanke i debele ljuske i ploče. Korišteni su 8- i 9- čvorni elementi degenerirane zakrivljene ljuske, s uslojenim modelom materijala po debljini ljuske (slike 1. i 2.). Svaki čvor ima pet stupnjeva slobode: tri translacijska pomaka u smjeru globalnih osi i dvije rotacije oko osi u ravnini srednje plohe ljuske. Svojstva betona mogu se razlikovati za svaki sloj po debljini ljuske. Armatura se modelira kao posebna lamela odgovarajuće debljine, s čvrstoćom i krutošću samo u smjeru pružanja šipki.



Slika 1. Uslojeni model po debljini ljuske



Slika 2. Element degenerirane trodimenzionalne ljuske

4 Model materijala za kratkotrajno statičko opterećenje

4.1 Model betona

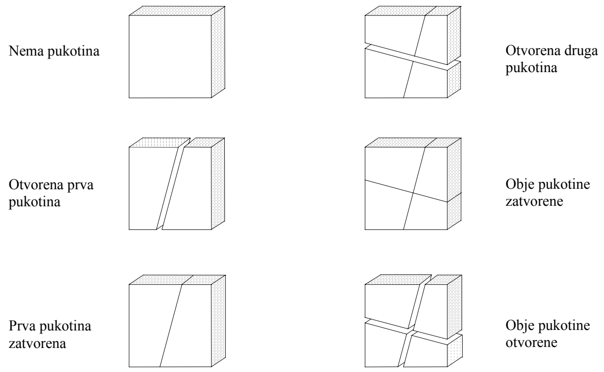
Upotrijebljen je u osnovi vrlo jednostavan model betona [20], [21], temeljen na osnovnim parametrima betona koje je ionako potrebno poznavati za druge potrebe (jednoosna tlačna i vlačna čvrstoća, modul elastičnosti i Poissonov koeficijent). Grafička interpretacija usvojenog modela prikazana je na slici 3.

4.1.1 Modeliranje betona u vlaku

Pretpostavljeno je linearno- elastično ponašanje betona sve dok se ne dosegne njegova vlačna čvrstoća. Uzima se da pukotine mogu nastati samo u ravninama okomitim na srednju ravninu ljuske. Naime, usvojeno je da se svaka lamela betona nalazi u stanju ravninskog naprezanja. Usvojen je model distribuiranih pukotina, odnosno pretpostavlja se da beton i nakon pucanja ostaje kontinuum. Primijenjen je model tzv. fiksnih ortogonalnih pukotina. Modelirano je djelomično i potpuno zatvaranje pukotina pri rasterećenju i ponovno otvaranje prije nastalih pukotina pri ponovnom opterećenju (slika 4.).

Doprinos vlačne krutosti neispucanog betona između pukotina simuliran je na uobičajeni način, indirektno preko "silazne krivulje" $\sigma - \varepsilon$ dijagrama betona u vlaku.

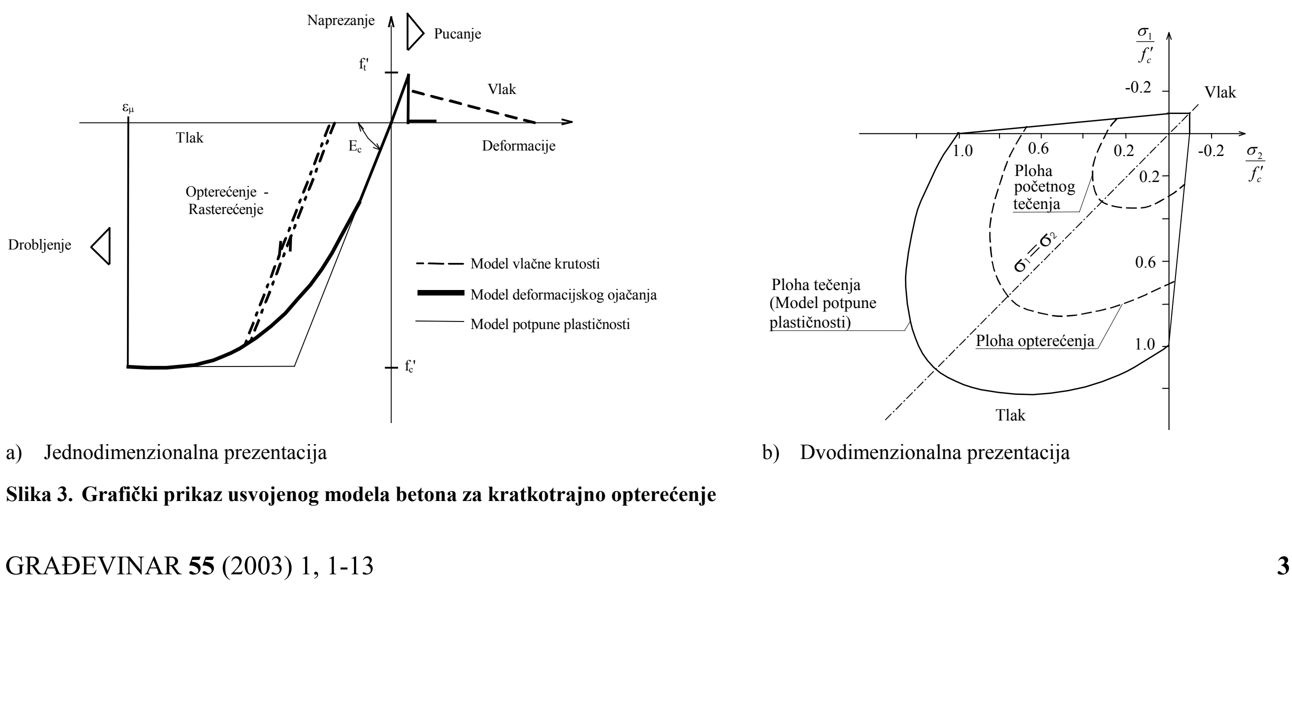
Simulacija posmične krutosti ispucanog betona (efekti "kvačenja" agregata i trenja između stijenki pukotine) izvršena je također na uobičajen način, redukcijom modula smika (G_{12}, G_{13}, G_{23}) ovisno o veličini vlačne deformacije okomite na ravninu pukotine.



Slika 4. Moguće stanje pukotina

4.1.2 Modeliranje betona u tlaku

Ponašanje betona modelirano je prema teoriji plastičnosti. Pretpostavljeno je linearno elastično ponašanje betona na početku djelovanja opterećenja, sve dok nije zadovoljen uvjet tečenja [16]. Nakon toga usvojeno je plastično ponašanje betona. Primijenjeno je tzv. pridruženo pravilo tečenja, odnosno usvojena je pretpostavka okomitosti vektora plastične deformacije na plohu tečenja. Uvjet drobljenja betona u tlaku definiran je komponentama deformacija. U rasterećenju je pretpostavljeno elastično ponašanje. Nakon drobljenja betona, nije se računalo s nikakvom krutošću betona.



a) Jednodimenzionalna prezentacija b) Dvodimenzionalna prezentacija

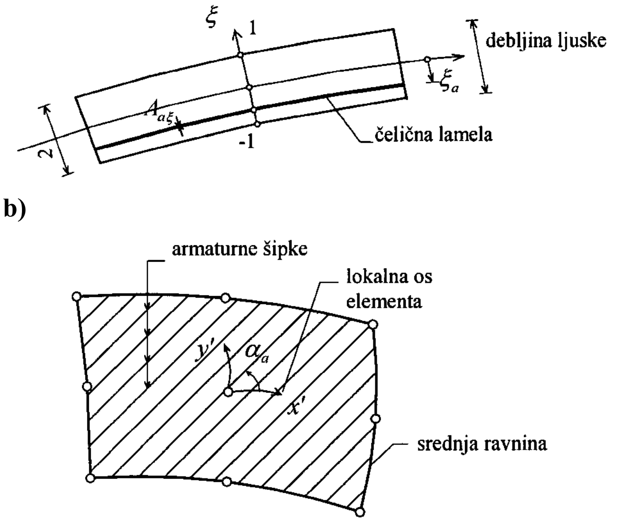
Slika 3. Grafički prikaz usvojenog modela betona za kratkotrajno opterećenje

4.2 Model armature

Način modeliranja armature grafički je prikazan na slici 5.

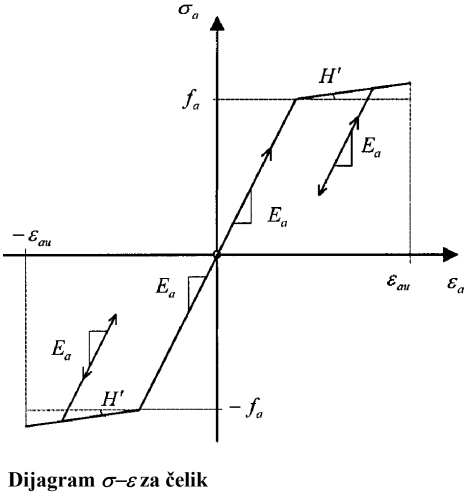
a)

b)



Slika 5. Modeliranje armature: a) ekvivalentna lamela armature; b) pružanje armaturnih šipki

Armaturne su šipke modelirane kao zasebne čelične lamele ekvivalentne (normalizirane) debljine, i na odgovarajućoj (normaliziranoj) udaljenosti od srednje plohe ljuske (slika 5.). Naprezanja se mogu javljati samo u smjeru pružanja šipki. Računano je s punom kompatibilnošću pomaka armature i okolnog betona (bez mogućnosti proklizavanja šipke).



Slika 6. Dijagram σ–ε za čelik

Ponašanje čelika opisano je bilinearnom vezom σ–ε, jednako u tlaku i vlaku (slika 6.). U rasterećenju je pretpostavljeno elastično ponašanje, s početnim modulom elastičnosti. Lom šipki nastaje kada deformacija u pravcu njihova pružanja prekorači specificiranu graničnu vrijednost.

5 Model materijala za dugotrajno opterećenje.

5.1 Model betona

5.1.1 Ukupne deformacije

Usvojena je pretpostavka da se ukupna jednoosna deformacija betona ε_t u bilo kojem vremenu t može rastaviti u komponente:

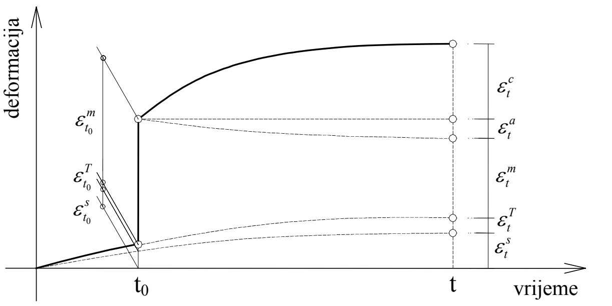
$$\varepsilon_t = \varepsilon_t^m + \varepsilon_t^{nm} \tag{1}$$

gdje ε_t^m označava mehaničku deformaciju izazvanu kratkotrajnim/trenutnim djelovanjem, a ε_t^{nm} nemehaničku deformaciju koja se može rastaviti kako slijedi

$$\varepsilon_t^{nm} = \varepsilon_t^c + \varepsilon_t^s + \varepsilon_t^a + \varepsilon_t^T \tag{2}$$

U izrazu (2) ε_t^c označava deformaciju puzanja, ε_t^s deformaciju skupljanja, ε_t^a deformaciju starenja i ε_t^T temperaturnu deformaciju. Deformacije $\varepsilon_t^m, \varepsilon_t^c$ *i* ε_t^a su od naprezanja betona.

Razlaganje navedenih komponenata deformacija vidi se na slici 7., gdje je prikazana povijest deformacija betonskog uzorka izloženog stalnom jednoosnom tlaku od trenutka t_0.



Slika 7. Shematski prikaz komponenti jednoosne tlačne deformacije betona

5.1.2 Puzanje

Za proračun jednoosne deformacije puzanja primijenjena je metoda Glanvillea i Dischingera, koja je bazirana na pretpostavci da je brzina puzanja funkcija tekućega jednoosnog naprezanja betona σ i proteklog vremena t nakon opterećivanja, tj.

$$\frac{d\varepsilon_t^c}{dt} = f(\sigma, t) \tag{3}$$

Ako se vrijeme podijeli u diskretne vremenske intervale Δt, uz $t_n = t$ i $t_{n+1} = t + \Delta t$, inkrementalna verzija jednadžbe (3) ima oblik

$$\Delta\varepsilon^{c}_{t_{n+1}} = \varepsilon^{m}_{t_{n+1}}\ \Delta\Phi_{t_n,t_{n+1}} = \varepsilon^{m}_{t_{n+1}}\left[\Phi_{t_{n+1}} - \Phi_{t_n}\right] \tag{4}$$

gdje $\Delta\varepsilon^{c}_{t_{n+1}}$ označava prirast deformacije puzanja između vremena t_n i t_{n+1}, ε^{m}_{n+1} je trenutna mehanička deformacija betona u vremenu t_{n+1} (može biti nelinearna funkcija naprezanja σ), $\Delta\Phi_{t_n,t_{n+1}}$ je prirast koeficijenta puzanja između vremena t_n i t_{n+1}, $\Phi_{t_{n+1}}$ je koeficijent puzanja za vrijeme t_{n+1} i Φ_{t_n} je koeficijent puzanja za vrijeme t_n. Inkrement deformacije puzanja $\Delta\varepsilon^{c}_{t_{n+1}}$ je izračunat na bazi uvjeta na početku predstojećeg vremenskog inkrementa t_{n+1}. Ova metoda, u osnovi vrlo jednostavna, dobro opisuje povijest deformiranja čak i u slučaju nagle i nepravilne promjene naprezanja. Budući da je inkrement deformacije puzanja temeljen samo na tekućoj trenutnoj deformaciji (ili naprezanju) i vremenskim vrijednostima, ova je metoda proračunski vrlo atraktivna.

Za koeficijente puzanja uzete su vrijednosti prema Eurokodu 2 [9], pa se sukladno tome i izraz (4) može napisati u obliku

$$\Delta\varepsilon^{c}_{t_{n+1}} = \varepsilon^{m}_{t_{n+1}}\left[\Phi_{t_{n+1},t_0} - \Phi_{t_n,t_0}\right] \tag{5}$$

gdje je

$$\Phi_{t_{n+1},t_0} = \Phi_0\beta^{c}_{t_{n+1},t_0} \tag{6}$$

$$\Phi_{t_n,t_0} = \Phi_0\beta^{c}_{t_n,t_0} \tag{7}$$

Ako se izrazi (6) i (7) uvrste u izraz (5), slijedi

$$\Delta\varepsilon^{c}_{t_{n+1}} = \varepsilon^{m}_{t_{n+1}}\ \Phi_0\left[\beta^{c}_{t_{n+1},t_0} - \beta^{c}_{t_n,t_0}\right] \tag{8}$$

U navedenim izrazima Φ_0 označava osnovnu veličinu puzanja, a $\beta^{c}_{t_{n+1},t_0}$ i $\beta^{c}_{t_n,t_0}$ koeficijente kojima se opisuje vremenski tijek puzanja pod opterećenjem.

Osnovna vrijednost puzanja Φ_0 može se odrediti s pomoću

$$\Phi_0 = \Phi_{RH}\ \beta_{f_{cm}}\ \beta_{t_0} \tag{9}$$

gdje Φ_{RH} označava koeficijent kojim se uzima utjecaj relativne vlage, β_{fcm} koeficijent kojim se uzima utjecaj čvrstoće betona i β_{t_0} koeficijent kojim se uzima utjecaj starosti betona na početku djelovanja opterećenja na osnovnu vrijednost puzanja. Pri tome je

$$\Phi_{RH} = 1 + (1 - RH/100)/(0.1\, h_0^{1/3}) \tag{10}$$

$$\beta_{f_{cm}} = 16.8/f_{cm}^{0.5} \tag{11}$$

$$\beta_{t_0} = 1/(0.1 + t_0^{0.2}) \tag{12}$$

$$h_0 = 2A_C/u \tag{13}$$

U tim izrazima RH označava relativnu vlažnost (u %), h_0 srednji polumjer elementa (u mm), f_{cm} srednju tlačnu čvrstoću betona kod starosti od 28 dana (u N/mm^2), t_0 starost betona u trenutku prvog nanošenja opterećenja (u danima), A_c ploštinu presjeka (u mm^2) i u opseg presjeka izloženog zraku (u mm).

Koeficijenti s kojima se opisuje vremenski tijek puzanja mogu se izračunati s pomoću

$$\beta^{c}_{t_{n+1},t_0} = \left[(t_{n+1} - t_0)/(\beta_H + t_{n+1} - t_0)\right]^{0.3} \tag{14}$$

$$\beta^{c}_{t_n,t_0} = \left[(t_n - t_0)/(\beta_H + t_n - t_0)\right]^{0.3} \tag{15}$$

U prethodnim izrazima t_n i t_{n+1} označavaju rubna vremena promatranoga vremenskog inkrementa (u danima), a β_H koeficijent kojim se uzima utjecaj relativne vlage RH (u %) i srednjeg polumjera elementa h_0, danog izrazom

$$\beta_H = 1.5\left[1 + (0.012RH)^{18}\right]h_0 + 250 \le 1500 \tag{16}$$

Utjecaj vrste cementa na veličinu puzanja betona može se uzeti u obzir tako da se izraz za starost betona u trenutku prvog opterećenja t_0 preinači u

$$t_0 = t_{0,T}\left\{9/\left[2 + (t_{0,T})^{1.2}\right] + 1\right\}^{\alpha} \ge 0.5 \tag{17}$$

gdje je $t_{0,T}$ podešena starost betona (u danima) u trenutku nanošenja opterećenja, uzevši u obzir utjecaj temperature, a α eksponent ovisan o vrsti cementa:

$\alpha =$ -1 za sporovežuće cemente

$\alpha =$ 0 za normalne i brzovežuće cemente

$\alpha =$ 1 za brzovežuće visokovrijedne cemente (18)

Utjecaj varijacije temperature u području između 0°C i 80°C na stupanj očvršćavanja betona može se uzeti u obzir podešavanjem starosti betona izrazom

$$t_T = \sum_{i=1}^{n}\exp\left\{-\left[4000/\left(273 + T_{\Delta t_i}\right)\right] - 13.65\right\}\Delta t_i \tag{19}$$

gdje je t_T podešena starost betona (u danima) uzevši u obzir utjecaj temperature, $T_{\Delta t_i}$ je temperatura (u °C) u vremenskom razdoblju Δt_i (broj dana s temperaturom T).

Srednji koeficijent varijacije za prognozu puzanja prema navedenim jednadžbama, koji je određen prema banci podataka laboratorijskih pokusa, iznosi oko 20%.

Kako se razmatrana prostorna diskretizacija odnosi na probleme ljusaka, s deformacijama $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, računano je s jednakim koeficijentima puzanja za sve komponente deformacije. Pri tome su koeficijenti puzanja, odnosno inkrementi puzanja po pojedinim komponentama deformacije, određeni kako je to prikazano za jednodimenzionalni problem.

5.1.3 Skupljanje

Jednoosno skupljanje betona obuhvaćeno je prema Eurokodu 2 [9], odnosno izrazom

$$\varepsilon_t^s = \varepsilon^{s0}\beta_t^s \tag{20}$$

gdje ε_t^s označava jednoosnu deformaciju skupljanja u vremenu t, ε^{s0} osnovnu vrijednost skupljanja, a β_t^s koeficijent kojim se opisuje vremenski tijek skupljanja.

Osnovna vrijednost skupljanja ε^{s0} određena je s pomoću

$$\varepsilon^{s0} = \varepsilon_{f_{cm}}^s \beta_{RH} \tag{21}$$

gdje je $\varepsilon_{f_{cm}}^s$ koeficijent kojim se uzima u obzir utjecaj čvrstoće betona na skupljanje, a β_{RH} koeficijent koji uključuje utjecaj vlažnosti okoliša. Pri tome je

$$\varepsilon_{f_{cm}}^s = \left[160 + \beta_{sc}\left(90 - f_{cm}\right)\right]10^{-6} \tag{22}$$

U navedenom izrazu β_{sc} označava koeficijent kojim se uzima utjecaj vrste cementa na skupljanje, pri čemu je

$\beta_{sc} = 4$ za sporovežuće cemente

$\beta_{sc} = 5$ za normalne i brzovežuće cemente

$\beta_{sc} = 8$ za brzovežuće visokovrijedne cemente

Koeficijent β_{RH} određen je izrazima

$\beta_{RH} = -1.55\ \beta_{SRH}$ za $40\% \le RH < 99\%$ (na zraku)

$\beta_{RH} = +0.25\ \beta_{SRH}$ za $RH \ge 99\%$ (u vodi)

gdje je β_{SRH} koeficijent definiran kao

$$\beta_{SRH} = 1 - \left(RH/100\right)^3 \tag{25}$$

Koeficijent β_t^s kojim se opisuje vremenski tijek skupljanja definiran je izrazom

$$\beta_t^s = \left[\left(t - t_s\right)/\left(0.035h_0^2 + t - t_s\right)\right]^{0.5} \tag{26}$$

U izrazu (26) t_s označava starost betona od koje se računa skupljanje (u danima), a $t - t_s$ stvarno trajanje skupljanja/bubrenja (u danima).

U sklopu iterativnog vremenskog algoritma, prirast deformacije skupljanja $\Delta\varepsilon_{n+1}^s$ između dva susjedna vremena t_n i t_{n+1} prema jednadžbi (20) može se odrediti s pomoću

$$d\varepsilon_{n+1}^s = \varepsilon^{s0}\left(\beta_{t_{n+1}}^s - \beta_{t_n}^s\right) \tag{27}$$

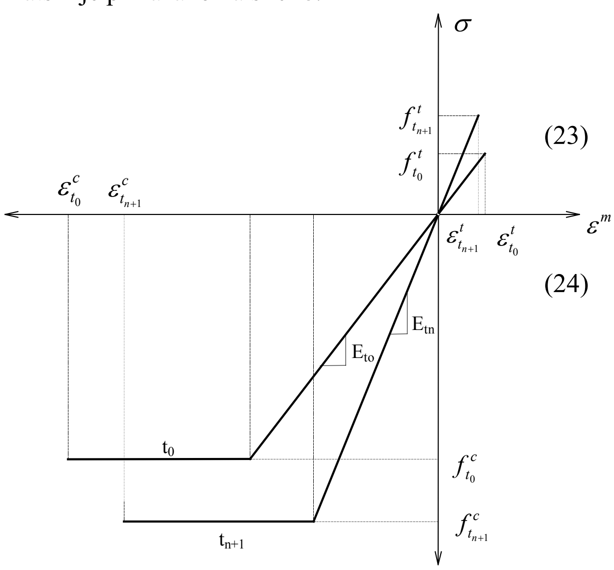
U tom izrazu koeficijenti $\beta_{t_n}^s$ i $\beta_{t_{n+1}}^s$ odgovaraju vremenima t_n i t_{n+1}. Ako se jednadžba (26) uvrsti u jednadžbu (27), slijedi

$$d\varepsilon_{n+1}^s = \varepsilon^{s0}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(t_{n+1} - t_s\right)/\left(0.035h_0^2 + t_{n+1} - t_s\right)\right]^{0,5} \\ -\left[\left(t_n - t_s\right)/\left(0.035h_0^2 + t_n - t_s\right)\right]^{0.5}\end{array}\right\} \tag{28}$$

Pri razmatranju problema ljusaka, uzima se da se skupljanje betona događa u definiranim ortogonalnim smjerovima x, y u srednjoj plohi ljuske, pri čemu se za pojedine smjerove inkrementi deformacije skupljanja $d\varepsilon_x^s, d\varepsilon_y^s$ izračunavaju kako je to prikazano za jednodimenzionalni problem.

5.1.4 Starenje

Deformacija starenja betona uzima se na indirektan način, povećavajući tijekom vremena početni modul elastičnosti i čvrstoću betona. Naime, pri odabiru veze $\sigma - \varepsilon^m$ u promatranom vremenu t_{n+1} uzimaju se u obzir tekuće mehaničke karakteristike betona, odnosno odgovarajuće vremenski "ojačani" materijal. Obuhvaćanje starenja betona za jednoosnu elasto-plastičnu vezu $\sigma - \varepsilon^m$ shematski je prikazano na slici 8.



Slika 8. Shematski prikaz obuhvaćanja starenja betona za jednoosnu elasto-plastičnu vezu $\sigma - \varepsilon^m$

Na slici indeks t_{n+1} je tekuće promatrano vrijeme, a indeks t_0 početno vrijeme; f^c je računska tlačna, a f^t računska vlačna čvrstoća betona; E je jedinstveni modul elastičnosti betona u tlaku i vlaku, ε^c je računska deformacija drobljenja betona u tlaku, a ε^t računska deformacija pucanja betona u vlaku.

Za definiranje odgovarajuće veze $\sigma - \varepsilon^m$ u pojedinom vremenu, najbolje se koristiti eksperimentalno utvrđenim parametrima betona. U nedostatku eksperimentalnih podataka, za prirast tlačne čvrstoće betona u vremenu može se primjerice upotrijebiti izraz [7]

$$f_{cm_t} = f_{cm} \exp\left[s\left(1 - 5.3 t^{-0.5}\right)\right] \tag{29}$$

U gornjem izrazu f_{cm}, kako je već rečeno, označava srednju tlačnu čvrstoću betona pri starosti betona t = 28 dana; f_{cm_t} označava srednju tlačnu čvrstoću betona u promatranom vremenu t (u danima), a s koeficijent koji ovisi o vrsti cementa i iznosi:

s = 0.30 za brzovežuće visokovrijedne cemente

s = 0.25 za normalne i brzovežuće cemente

s = 0.20 za sporovežuće cemente (30)

Utjecaj varijacije temperature na promjenu čvrstoće može se uzeti u obzir podešavanjem starosti betona prema izrazu (19).

Modul elastičnosti betona u tlaku u promatranom vremenu t, u nedostatku eksperimentalnih podataka, može se izračunati iz odgovarajuće srednje tlačne čvrstoće betona u tom trenutku, primjerice izrazom [9]

$$E_{cm_t} = 9.5\left(f_{ck_t} + 8\right)^{1/3} \tag{31}$$

gdje E_{cm_t} označava srednju vrijednost tzv. sekantnog modula elastičnosti (u kN/mm^2), a f_{ck_t} karakterističnu tlačnu čvrstoću valjka (u N/mm^2) u vremenu t.

Zakon promjene vlačne čvrstoće betona u vremenu, u nedostatku eksperimentalnih podataka i preciznijih izraza, može se usvojiti prema izrazu (29). Računski modul elastičnosti betona u vlaku uzet je kao i u tlaku.

Vezano za promatrano stanje betonskih ljusaka, veza $\sigma - \varepsilon^m$ uzeta je na način prikazan u točki 4.1, pri čemu se u svakom promatranom vremenu (vremenskom inkrementu) određuje:

- tlačna čvrstoća betona,
- vlačna čvrstoća betona,
- modul elastičnosti betona,
- deformacija drobljenja betona.

Promjena modula smika betona uzeta je preko promjene modula elastičnosti. Poissonov koeficijent uzet je nepromjenjiv u vremenu.

5.2 Model armature

Za armaturu se primjenjuje model kao u točki 4.2, dopunjen utjecajem temperature. Naime, ukupna deformacija čelika sastoji se od mehaničke/trenutne deformacije i temperaturne deformacije koja predstavlja jedinu nemehaničku deformaciju. Čelik je stabilan materijal, kod kojeg su deformacije puzanja i starenja zanemarive.

Usvojeni konstitutivni model čelika može se grafički prikazati kao horizontalno translatirani dijagram sa slike 6.

6 Jednadžbe ravnoteže

Za prostornu diskretizaciju konstrukcije primjenjuje se metoda konačnih elemenata, a za vremensku diskretizaciju problema metoda konačnih diferencija. Inkrementalno-iterativna jednadžba ravnoteže promatrane konstrukcije, koja odgovara tekućoj geometriji i materijalnim karakteristikama, može se napisati u obliku

$$\mathbf{K}_{n+1}^{i+1}\, \Delta\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \Delta\mathbf{R}_{n+1} \tag{32}$$

gdje indeks n označava vremenski inkrement a i iteracijski korak, $\mathbf{K}_{n+1}^{i+1}$ označava matricu tangentne krutosti, koja uključuje i utjecaj promjene geometrije konstrukcije, $\Delta\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}$ označava vektor prirasta čvornih pomaka, a $\Delta\mathbf{R}_{n+1}$ vektor prirasta ekvivalentnih čvornih sila oblika

$$\Delta\mathbf{R}_{n+1} = \Delta\mathbf{R}_{n+1}^{e} + \Delta\mathbf{R}_{n+1}^{nm} + \mathbf{R}_{n}^{u} \tag{33}$$

U tom izrazu $\Delta\mathbf{R}_{n+1}^{e}$ označava vektor prirasta vanjskih (napadnih) sila, $\Delta\mathbf{R}_{n+1}^{nm}$ vektor prirasta ekvivalentnih čvornih sila zbog nemehaničke deformacije $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{nm}$ između vremena t_{n+1} i t_n (od puzanja, skupljanja, starenja i temperature), a $\mathbf{R}_{n}^{u}$ neuravnotežene sile iz prethodnog vremenskog inkrementa n. Vektor $\Delta\mathbf{R}_{n+1}^{nm}$ može se izračunati izrazom

$$\Delta\mathbf{R}_{n+1}^{nm} = \int_V \mathbf{B}_{n+1}^{T}\, \mathbf{D}_{n+1}\, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{nm}\, dV \tag{34}$$

gdje $\mathbf{B}_{n+1}^{T}$ označava tangentnu matricu veze pomak-deformacija, a $\mathbf{D}_{n+1}$ tangentnu matricu veze naprezanje-deformacija.

Inkrement ukupne nemehaničke deformacije $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{nm}$ jest

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{nm} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{c} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{s} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{a} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{T} \tag{35}$$

i sastoji se od inkrementa deformacije puzanja $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{c}$ skupljanja $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{s}$, starenja $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{a}$, i temperaturnih promjena $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{T}$.

Ukupna je nemehanička deformacija

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{nm} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n}^{nm} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{nm} \tag{36}$$

Prirast ukupnih deformacija $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1}$ može se izračunati s pomoću

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{B}_{n+1}^{i}\ \Delta\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} \tag{37}$$

a ukupna tekuća deformacija s pomoću

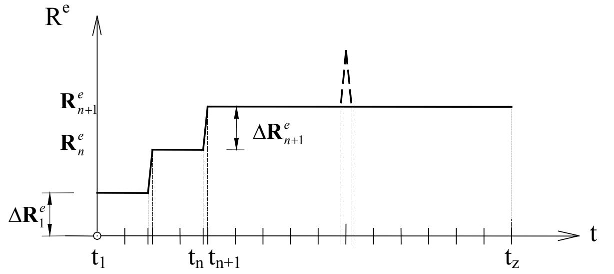
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} \tag{38}$$

Tekuća je mehanička deformacija

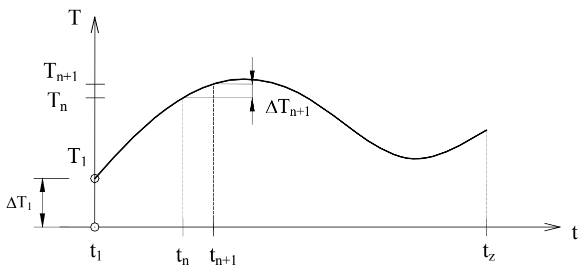
$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\right)_{n+1}^{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{nm} \tag{39}$$

7 Postupak vremenske analize

Polazi se od poznate povijesti vanjskoga čvornog opterećenja $\mathbf{R}^{e}$, koja je vezana za vremenski tijek građenja konstrukcije, kao što je shematski prikazano na slici 9. Promjene vanjskog opterećenja obično su diskontinuirane i često su praćene odgovarajućom promjenom nosivog sustava. Promatrana vremenska domena podijeli se u diskretna vremena t_1 do t_z, za koja se računaju naponsko-deformacijska stanja konstrukcije. Eventualno "trenutno" nanošenje opterećenja računski se simulira njegovom aplikacijom u, po volji, malim vremenskim intervalima.



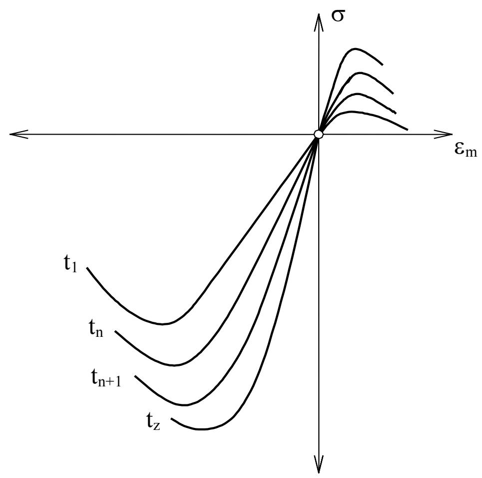
Slika 9. Povijest vanjskog čvornog opterećenja



Slika 10. Povijest temperature

Ako se razmatra utjecaj poznate povijesti temperaturnih utjecaja, odrede se inkrementi temperature sukladno odabranoj vremenskoj diskretizaciji, a prema slici 10.

Također se polazi od poznate veze između vektora naprezanja σ i vektora mehaničke deformacije betona $\boldsymbol{\varepsilon}^{m}$ u svakom promatranom vremenu, odnosno od poznatog tekućeg konstitutivnog modela materijala koji uključuje efekte starenja (slika 11.).



Slika 11. Veza naprezanje-deformacija (jednodimenzionalna predodžba)

Uz usvojena pravila puzanja i skupljanja betona, u svakom vremenskom koraku diskretizirane vremenske domene računaju se pomaci, deformacije i naprezanja konstrukcije. Provodi se postupna integracija, korak po korak, u kojoj se inkrementalno-iterativna rješenja dodaju prethodnima, za dobivanje tekućih rješenja. Pretpostavlja se da su poznata sva rješenja u vremenu t_n. Za postupak u vremenu t_{n+1} treba postupiti redom dijagramu toka rješenja prikazanom na slici 12.

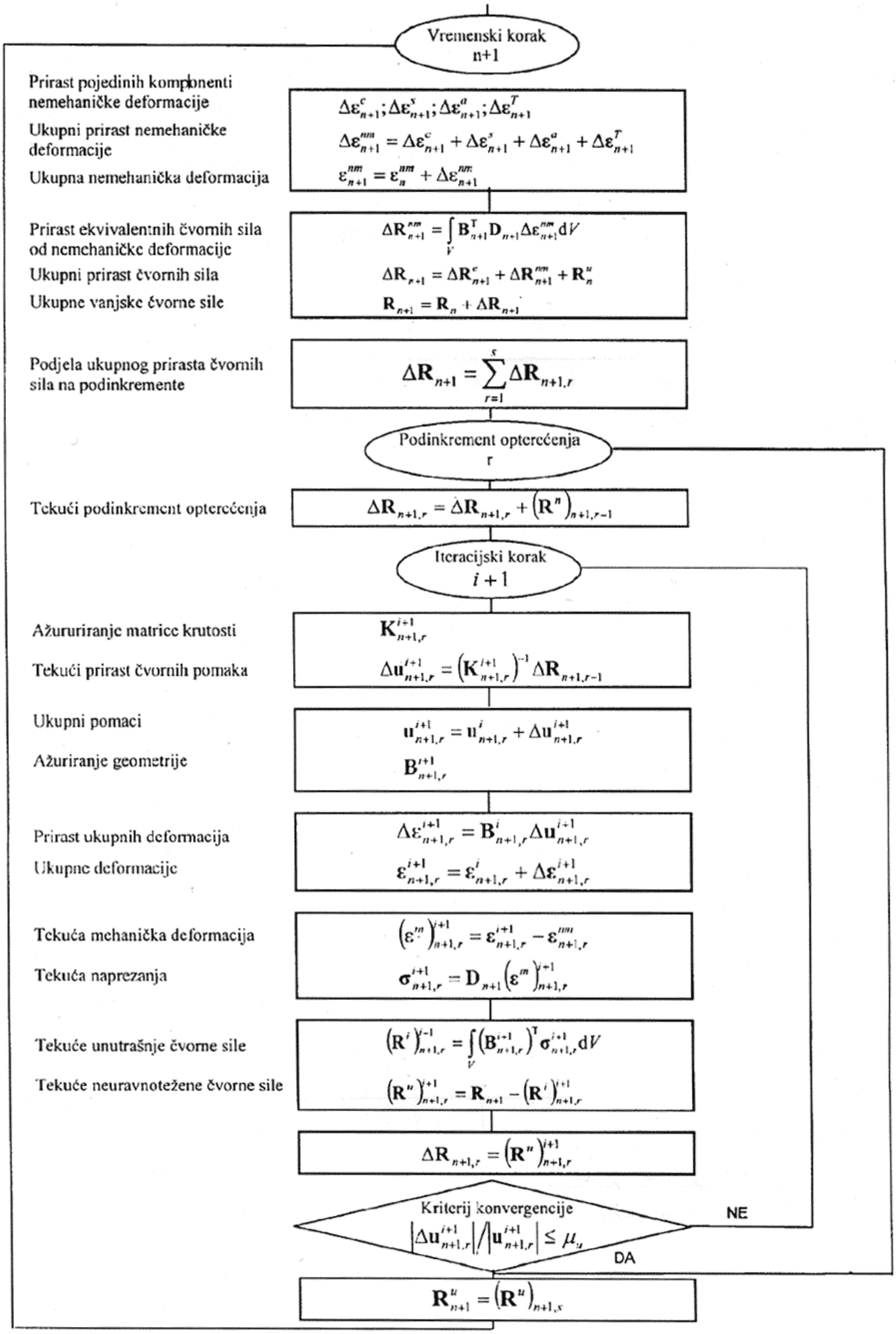
Iteracijski koraci ponavljaju se sve dok neuravnotežene čvorne sile $\left(\mathbf{R}^{u}\right)_{n+1,r}^{i+1}$ nisu dovoljno male, odnosno dok je prirast pomaka $\Delta\mathbf{u}_{n+1,r}^{i+1}$ u odnosu na ukupne pomake $\mathbf{u}_{n+1,r}^{i+1}$ propisano mali, tj. do

$$\frac{\Delta\mathbf{u}_{n+1,r}^{i+1}}{\mathbf{u}_{n+1,r}^{i+1}} \le \mu_u \tag{40}$$

gdje je μ_u dopustiva tolerancija.

Nakon zadovoljenja gornjeg kriterija, neuravnotežene sile $\left(\mathbf{R}^{u}\right)_{n+1,r}$ dodaju se idućem subinkrementu čvornih sila $\Delta\mathbf{R}_{n+1,r+1}$ i iteracijski se postupak ponovo nastavlja. Na kraju iteracija posljednjeg subinkrementa opterećenja $\Delta\mathbf{R}_{n+1,s}$, prelazi se na idući vremenski korak.

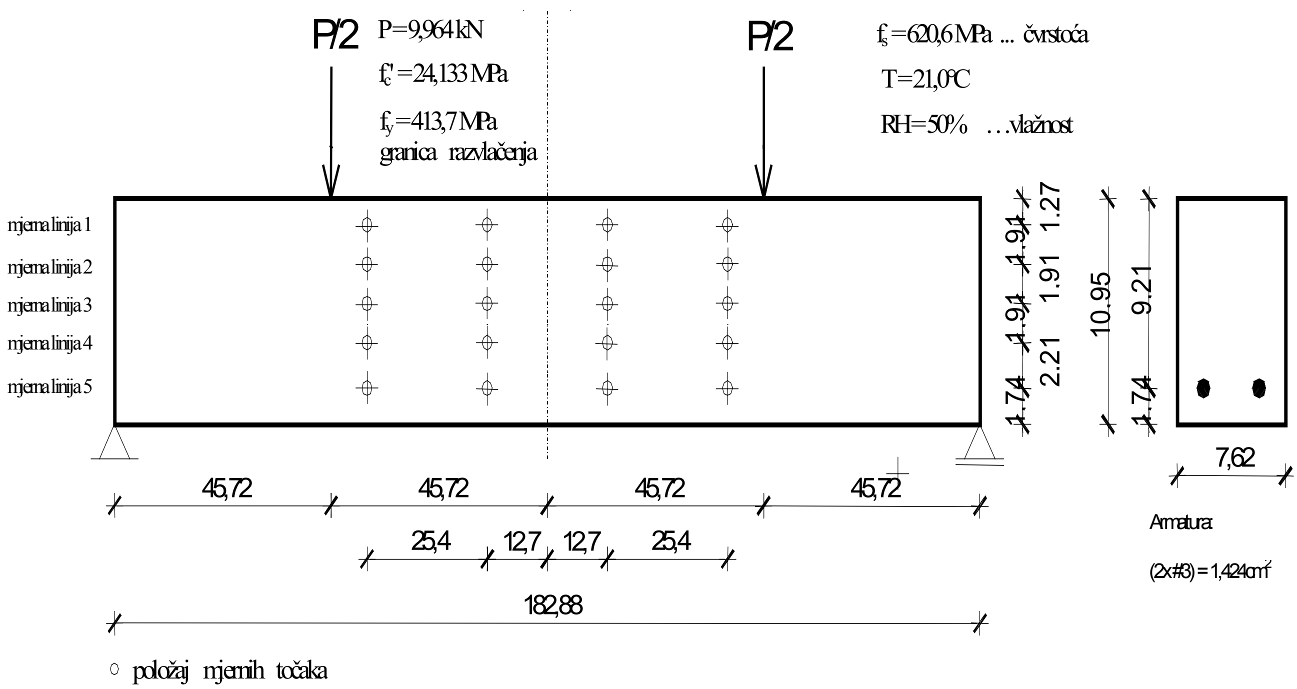
Utjecaj nastajanja/građenja konstrukcije tijekom vremena, odnosno utjecaj promjene prostorne domene problema, obuhvaćen je odgovarajućom promjenom prostorne geometrije konstrukcije i definiranjem početnih stanja u karakterističnim vremenima.



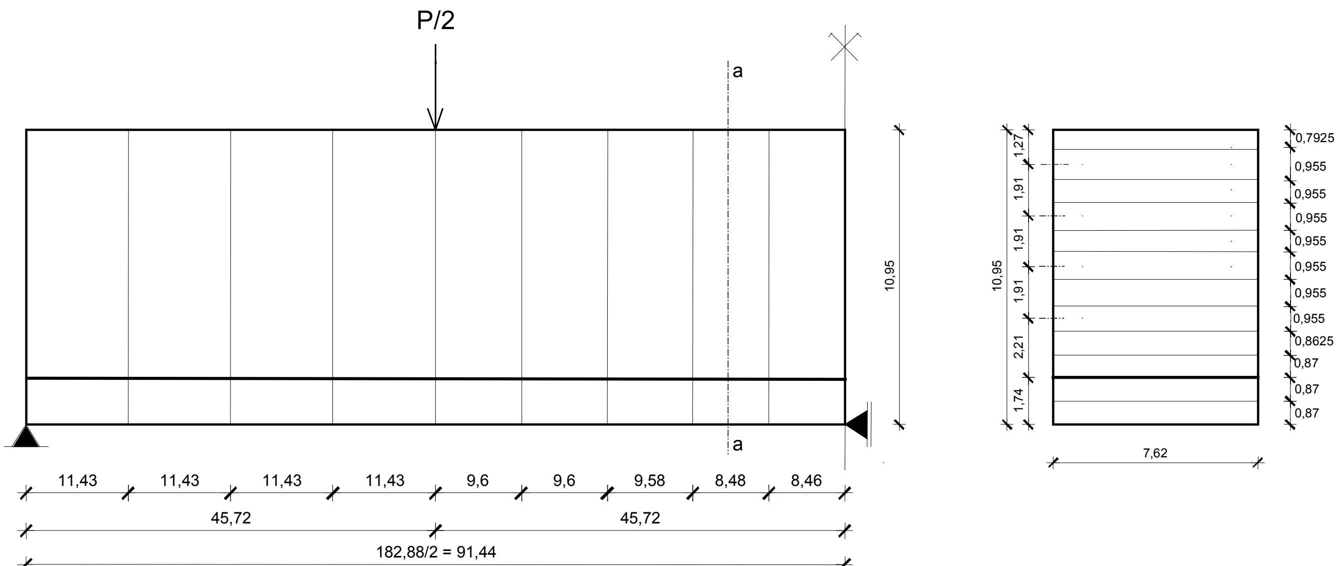
Slika 12. Dijagram toka rješenja problema u inkrementalno-iterativnom obliku

8 Numerički primjer

U nedostatku dostupnih eksperimentalnih ili numeričkih rezultata vremenske analize neke armiranobetonske ljuske ili ploče, modelirano je vremensko ponašanje armiranobetonske grede koju su eksperimentalno ispitali Corley i Sozen [8]. Analizirana je greda tipa C3 iz navedene literature, čiji su osnovni podaci prikazani na slici 13. Greda je opterećena koncentriranim silama u četvrtinama raspona. Praćeno je stanje progiba grede u polovini raspona, te stanje deformacija u naznačenim mjernim točkama tijekom dviju godina.



Slika 13. Podaci o analiziranoj gredi



a) uzdužna dispozicija

b) poprečni presjek

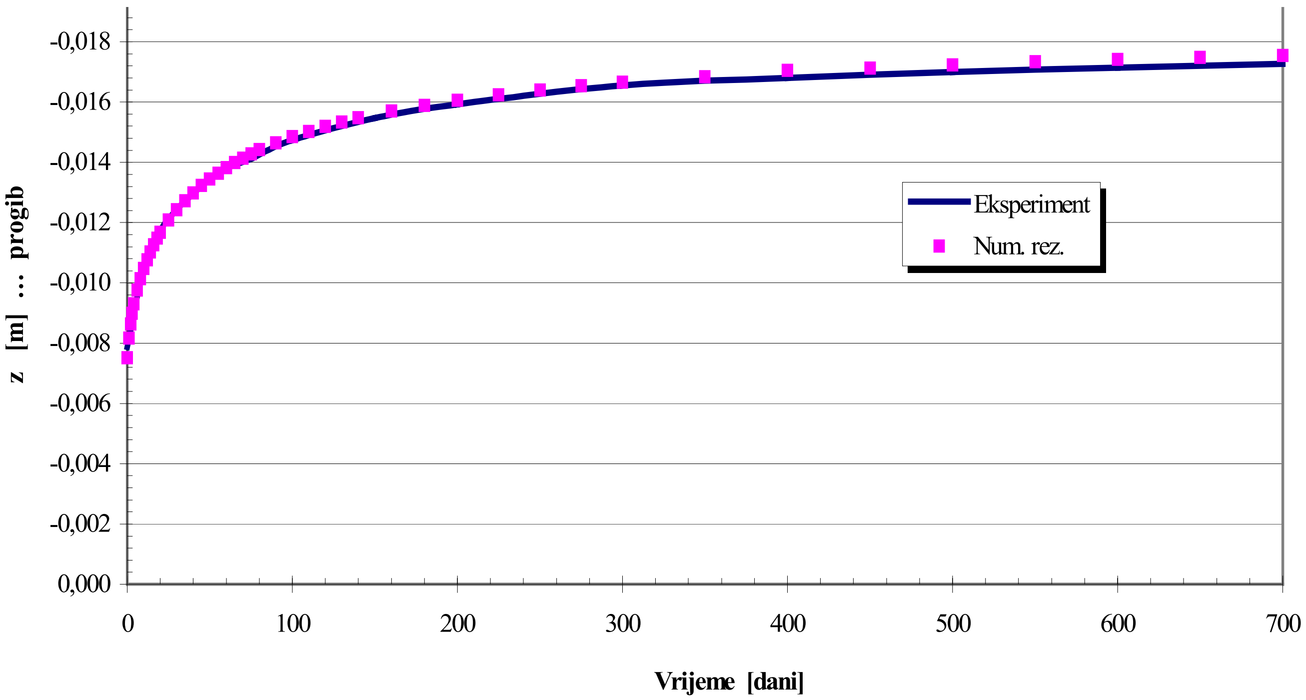
Slika 14. Diskretizacija grede

Tablica 1. Parametri materijala za kratkotrajno opterećenje

Beton		Čelik	
Modul elastičnosti	$E_c = 25000$ MPa	Modul elastičnosti	$E_a = 200000$ MPa
Poisson-ov koeficijent	$\nu = 0{,}166$	Granica tečenja	$\sigma_y = 413{,}7$MPa
Granična tlačna čvrstoća	$f_c' = 24{,}133$ MPa	Parametar ojačanja	$H' = 0$
Granična vlačna čvrstoća	$f_t' = 2$ MPa	Granična čvrstoća	$f_a = 620{,}6$ MPa
Deformacija drobljenja	$\varepsilon_{cu} = 0{,}0035$	Granična deformacija	0,01
Parametri vlačne krutosti	$\varepsilon_m = 0{,}5$	Pružanje šipki:	
	$\varepsilon_{ts} = 0{,}0012$	x smjer	$\alpha = 0$
Parametar posmične krutosti	$\varepsilon_{sh} = 0{,}0012$		

Tablica 2. Parametri betona za dugotrajno opterećenje

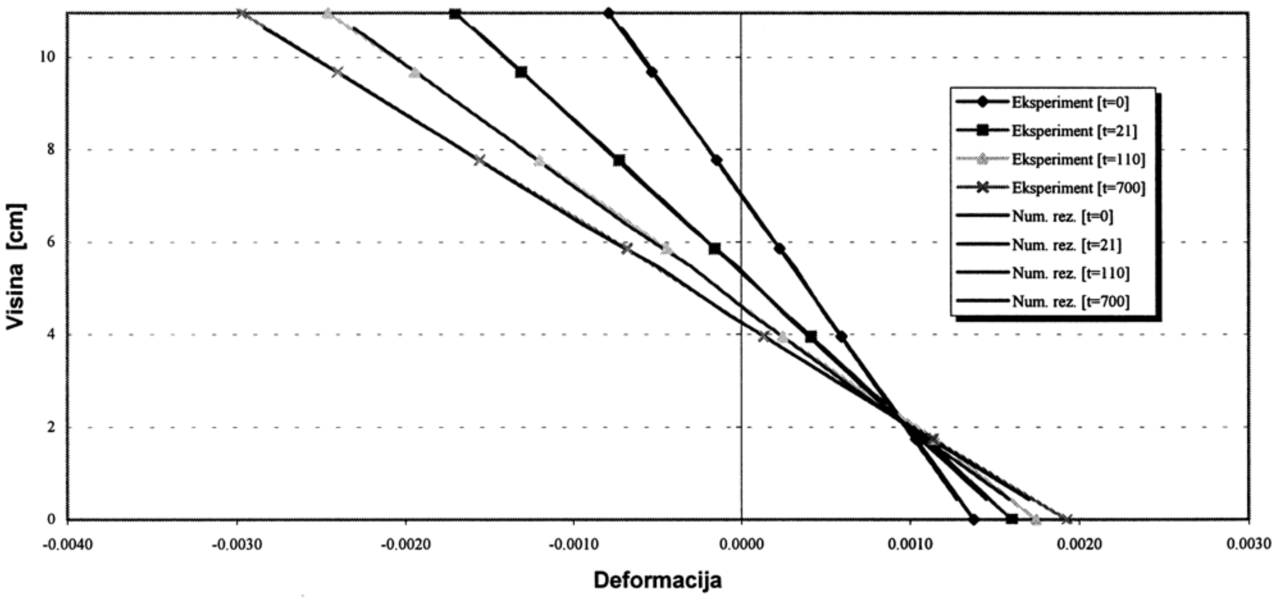
Srednji polumjer elementa	$h_o = 44$ mm
Relativna vlažnost	$RH = 50\%$
Srednja tlačna čvrstoća kod starosti 28 dana	$f_{cm} = 24{,}133$ MPa
Početak računanja skupljanja	$t_s = 30$ dana
Koeficijent za skupljanje prema vrsti cementa	$\beta_{sc} = 8$
Koeficijent za starenje prema vrsti cementa	$s = 0{,}30$
Starost betona u trenutku nanošenja opterećenje	$t_o = 30$ dana



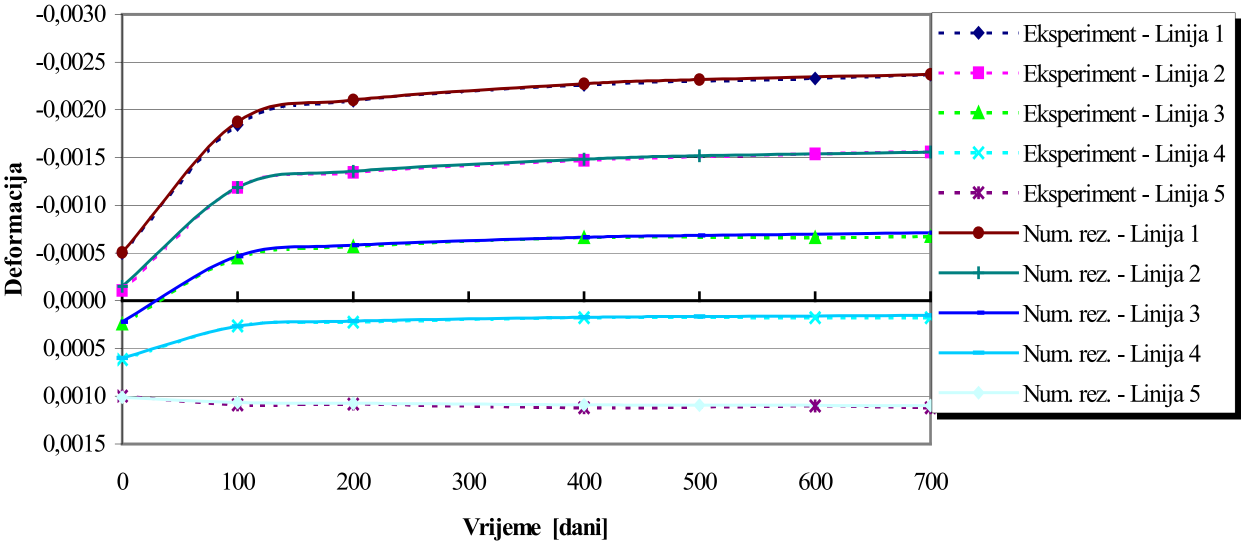
Slika 15. Progib sredine grede u vremenu

Prostorna diskretizacija grede prikazana je na slici 14., a odabrani parametri betona i čelika u tablicama 1. i 2.

Neki rezultati proračuna prikazani su na slikama 15., 16. i 17. Kao što se vidi, dobiveni numerički rezultati



Slika 16. Raspodjela deformacija po visini grede



Slika 17. Prikaz deformacija grede po mjernim linijama u vremenu

vrlo se dobro slažu s eksperimentalno utvrđenim vrijednostima [8].

9 Zaključak

Opisani proračunski model i na temelju njega izrađeni program VALJ mogu, prema uvjerenju autora, korisno poslužiti u analizama armiranobetonskih ploča i ljusaka, (a katkad i greda) gdje je važno uključenje utjecaja reoloških osobina betona. U ovom članku model je primijenjen na proračun armiranobetonske grede, a u sljedećem prilogu bit će prikazana primjena i na križnoarmiranoj ploči.

LITERATURA

[1] Ahmad, S.: *Curved finite elements in the analysis of solid, shell and plate*, Ph.D. Thesis, University College of Swansea, C/PH/7/69, 1969.

[2] Ahmad, S.; Iron, B.M.; Zienkiewicz, O.C.: *Analysis of thick and shell structures by curved finite elements*, Intl. J. Numer. Meth. Engng. (1970) 2, 419-451.

[3] Arutyunyan, N. K.: *Some problems in the theory of creep*, Pergamon press, inc., New York, N.Y., (1966).

[4] Bažant, Z. P.; Kim, J.K.: *Improved prediction model for time – dependent deformations of concrete: Part 1 – Shrinkage*, Materials and Structures, Vol. 24 (1991), 327-345.

[5] Bažant, Z. P.; Kim, J.K.: *Improved prediction model for time – dependent deformations of concrete: Part 2 – Basic creep*, Materials and Structures, Vol. 24 (1991), 409-421.

[6] Bažant, Z. P.; Kim, S. S.: *Nonlinear creep of concrete – adaptation and flow*, I. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE 105, (EM3) (1979), 429-446.

[7] CEB: *Evaluation of the time dependent behaviour of concrete*, Bulletin d'Information No. 199 (1990).

[8] Corley, W. G.; Sozen, M. A.: *Time-Dependent Deflection of Reinforced Concrete Beams*, ACI Journal, Vol. 63, No.3. (1966), 373-386.

[9] EUROCODE 2: *Design of Concrete Structures, Part 1: General Rules and Rules for Buildings*, Br• ssel (1990).

[10] Eymard, R.: *Allowing for the creep of concrete in a finite-element structural calculation*, Comp. Of Struct., Vol. 53, No. 4 (1994), 921-928.

[11] Figueiras, J.A.; Owen, D.R.J.: *Analysis Of Elasto-Plastic And Geometrically Non-Linear Anisotropic Plates And Shell In Finite Element Software For Plates And Shells*, Hinton, E.; Owen, D.R.J. (Eds.), Pineridge Press, 1984.

[12] Harapin, A.: *Numerička simulacija dinamičkog međudjelovanja tekućine i konstrukcije*, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2000.

[13] Hofstetter, G.; Mang, H. A.: *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*, Vienna, 1995.

[14] Huang, H. C.: *Static and Dynamic Analysis of Plates and Shells,* Springer-Verlag, 1989.

[15] Huang, H. C.; Hinton, E.: *A New Nine Node Degenerated Shell Element With Enhanced Membrane And Shear Interpolation*, Int. J. Num. Meth. Eng. (1986) 22, 73-92.

[16] Matešan, D.: *Nelinearna analiza betonskih lju*ski, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2000.

[17] Radnić, J.: *Modelling of the strain rate effects in dynamic analysis of R/C structures*, Inženjersko modeliranje 3, 1-2 (1990), 13-20.

[18] Radnić, J.: *Statičke i dinamičke analize betonskih gravitacijskih brana*, Građevinar 45 (1993), 2.

[19] Radnić, J.; Damjanić, F.: *Numerički model za statičku i dinamičku analizu armiranobetonskih konstrukcija,* Izgradnja (1989) 10, 5-14.

[20] Radnić, J.; Matešan, D.; Harapin, A.: *Model for Static Analyses of Concrete Shell*, Engineering Modelling, Vol. 13 (2000) 3-4, 93-99.

[21] Radnić, J.; Harapin, A.; Matešan, D.: *Statička i dinamička analiza betonskih ljusaka*, Građevinar, 53(2001) 11, 695.-709.

[22] Scalon, A.; Murray, W.: *Time-dependent reinforced concrete slabs deflection*, Journal of the Structural Division, Vol. 100, No. ST9 (1974), 1911-1925.

[23] Scordelis, A. C.: *Analytical models for nonlinear material, geometric and time-dependent effects*, Int. Symp. Nonlinearity and Continuity in Prestressed Concrete (Edited by M. Z. Cohn), Vol. 2 (1983), 25-43.

[24] Timoshenko, S. P.; Woinowsky-Krieger S.: *Theory of plates and shells*, 2nd edn., McGraw-Hill, New York, 1961.

[25] Yue, L. L.; Taerwe, L.: *Two-function method for the prediction of concrete creep under decreasing stress,* Materials and Structures, Vol. 26 (1993), 268-273.