

Primljen / Received: 21.10.2011.

Ispravljen / Corrected: 8.2.2012.

Prihvaćen / Accepted: 21.2.2012.

Dostupno online / Available online: 15.3.2012.

Čelični plošni elementi opterećeni u svojoj ravnini: faktori izbočivanja i kritična naprezanja

Autori:



Prof.dr.sc. **Mehmed Čaušević**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Rijeci
Građevinski fakultet
mehmed.causevic@gradri.hr



Doc.dr.sc. **Mladen Bulić**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Rijeci
Građevinski fakultet
mladen.bulic@gradri.hr

Pregledni rad

Mehmed Čaušević, Mladen Bulić

Čelični plošni elementi opterećeni u svojoj ravnini: faktori izbočivanja i kritična naprezanja

U radu je analizirana stabilnost čeličnih plošnih elemenata opterećenih u svojoj ravnini. Detaljno je objašnjen pojam elastičnog kritičnog naprezanja izbočivanja ploče te s njim u vezi i faktor izbočivanja. Prikazan je izračun faktora izbočivanja i kritičnog naprezanja plošnog elementa za proizvoljne rubne uvjete, proizvoljnu raspodjelu naprezanja i bilo koji odnos dužine i širine ploče analitičkim postupkom te primjenom specijaliziranog računalnog programa EBPlat, koji je utemeljen na europskoj normi EN 1993-1-5.

Ključne riječi:

plošni nosači, kritično naprezanje, faktor izbočivanja, stabilnost plošnog elementa, računalni program EBPlat

Subject review

Mehmed Čaušević, Mladen Bulić

Steel plate elements subjected to load in their own plane – buckling factors and critical loads

The stability of steel plate elements subjected to loading in their own plane is analyzed in the paper. The notion of elastic critical plate buckling stress is explained, and the related buckling factor is defined. The analysis of buckling factor and critical plate element stress for arbitrary boundary conditions, arbitrary stress distribution, and any plate length to width ratio, is presented by means of an analytic procedure and using a specialized computer program EBPlat, which is based on the European standard EN 1993-1-5.

Key words:

plate girders, critical stress, buckling factor, plate element stability, computer program EBPlate

Übersichtsarbeit

Mehmed Čaušević, Mladen Bulić

In ihrer Ebene belastete Stahlblechelemente – Knickfaktoren und kritische Beanspruchungen

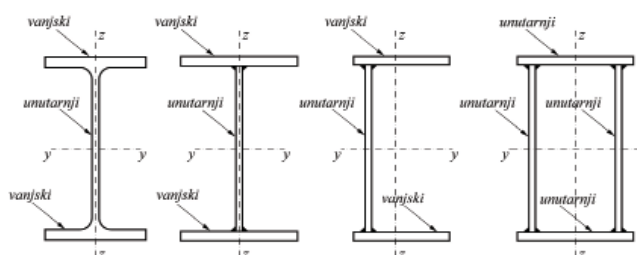
In der Arbeit wird die Stabilität von Stahlblechelementen analysiert, die in ihrer Ebene belastet wurden. Der Begriff der elastischen kritischen Beanspruchung des Blechknicks und der damit verbundene Knickfaktor werden detailliert erläutert. Dargestellt ist die Berechnung des Knickfaktors und der kritischen Beanspruchung der Blechelemente bei willkürlichen Randbedingungen, willkürlichen Beanspruchungsverteilung und einem beliebigen Verhältnis der Blechbreite und -länge durch Anwendung des analytischen Verfahrens und der spezialisierten Software EBPlate, die auf der Europäischen Norm EN 1993-1-5 beruht.

Schlüsselwörter:

Blechträger, kritische Beanspruchung, Knickfaktor, Stabilität des Blechelements, Software EBPlate

1. Uvod

Čelični konstrukcijski elementi, valjani ili zavareni, mogu se razmatrati kao da su sastavljeni iz plošnih elemenata od kojih su neki unutarnji, a neki vanjski, slika 1. Budući da su plošni elementi poprečnih presjeka klase 4 relativno tanki i povećane lokalne vitkosti, kada su tlačno naprezani u svojoj ravnini (kao posljedica uzdužne tlačne sile koja djeluje na cijeli poprečni presjek i/ili kao posljedica savijanja), oni se mogu lokalno izbočiti, te se radi toga u izračunu uzima njihova umanjena vrijednost poprečnog presjeka, tablica 1. [1, 2]. Lokalno izbočivanje plošnog elementa, bez obzira na njegov razmještaj u poprečnom presjeku, ograničava otpornost cijelog presjeka ili čitavog elementa na uzdužnu silu, ili otpornost na savijanje, sprječavajući dosizanje tečenja presjeka. Izbjegavanje preuranjenog otkazivanja nastalog od učinaka lokalnog izbočivanja može se postići ograničavanjem odnosa širine i debljine pojedinog plošnog elementa poprečnog presjeka, te poprečnim i uzdužnim ukrućivanjima. Navedeni problem se kontrolira uvođenjem faktora izbočivanja k_{σ} , tablica 1.



Slika 1. Plošni elementi (valjani ili formirani zavarivanjem) od kojih je sastavljen nosač

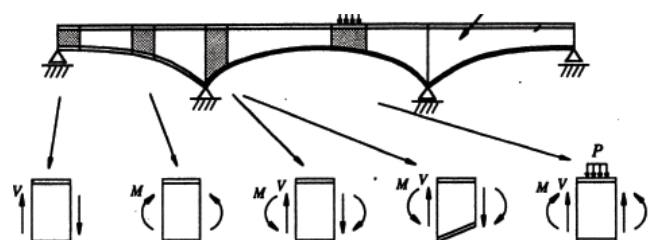
U nastavku će se pokazati kako su nastale vrijednosti faktora izbočivanja k_{σ} iz tablice 1. Uradit će se primjer s takvim rubnim uvjetima za koji se dobije vrijednost $k_{\sigma} = 4,0$ iz tablice 1, i to najprije analitički, a zatim primjenom specijaliziranog softverskog paketa EBPlate (engl. *Elastic Buckling of Plate*) [3].

Tablica 1. Vrijednosti faktora izbočivanja k_{σ} za unutarnji element u tlaku [1]

Raspodjela napona (tlak je pozitivan)	Efektivna širina b_{eff}
	$\psi = 1$: $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = 0,5 b_{eff}$ $b_{e2} = 0,5 b_{eff}$
	$1 > \psi \geq 0$: $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = \frac{2}{5-\psi} b_{eff}$ $b_{e2} = b_{eff} - b_{e1}$
	$\psi < 0$: $b_{eff} = \rho b_c = \rho \bar{b} / (1-\psi)$ $b_{e1} = 0,4 b_{eff}$ $b_{e2} = 0,4 b_{eff}$
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1 $1 > \psi > 0$ 0 $1 > \psi > -1$ -1 $-1 > \psi > -3$
Faktor k_{σ}	4,0 $8,2 / (1,05 + \psi)$ 7,81 $7,81 - 6,29\psi + 9,78\psi^2$ 23,9 $5,98(1-\psi)^2$

Znači da se za razumijevanje načina definiranja klase 4 poprečnog presjeka - redukcije površine poprečnog presjeka klase 4 (određivanje faktora izbočivanja k_{σ}) treba poznavati teorija stabilnosti plošnih elemenata opterećenih u svojoj ravnini, i to na način kako se ta teorija izlaže u tehničkoj mehanici. Osim za tu svrhu, ova teorija ima svoju primjenu i u sljedećim slučajevima:

- kod bočno torzijskog izvijanja elemenata (EN 1993-1-1) [4],
- kod stabilnosti tlačno opterećenih čeličnih štapova sastavljenih od plošnih elemenata (hrptova i pojasnica) (EN 1993-1-1) [5, 6],
- u analizi stabilnosti visokih limenih nosača kod mostova (EN 1993-1-5) [2, 7], slika 2,
- u analizi stabilnosti limenih nosača s ukrućenjima (EN 1993-1-5) [2].



Slika 2. Segmenti visokog limenog nosača kod mostova opterećeni u svojoj ravnini

2. Opća teorija stabilnosti plošnih nosača

2.1. Naprezanje od savijanja

Promatra se hrbat na slici 3. čiji je diferencijalno mali dio prikazan na slikama 4. i 5., za koji se prema općoj teoriji savijanja tankih ploča iz uvjeta ravnoteže u pravcu okomitom na promatranu ravninu dobije diferencijalna jednačba progiba plošnog elementa [6, 8]:

$$q \cdot dx \cdot dz - D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right) dx \cdot dz = 0 \tag{1}$$

$$q \cdot dx \cdot dz - D \cdot \Delta \Delta w \cdot dx \cdot dz = 0$$

$$Y_{(q)} - D \cdot \Delta \Delta w \cdot dx \cdot dz = 0,$$

gdje je:

w - pomak okomito na ravninu $dx \cdot dz$

$Y_{(q)}$ - opterećenje okomito na ravninu $dx \cdot dz$, $Y_{(q)} = q \cdot dx \cdot dz$

D - krutost plošnog elementa na savijanje

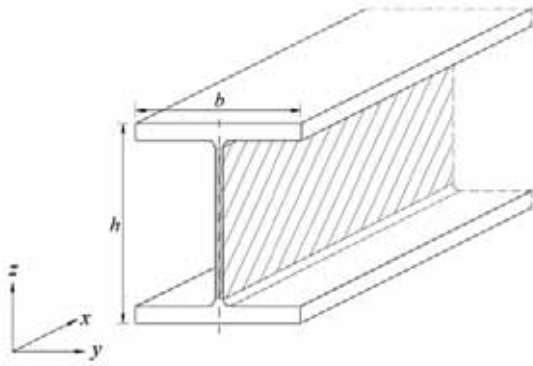
$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

gdje je:

ν - Poissonov koeficijent,

h - debljina plošnog elementa,

E - modul elastičnosti.

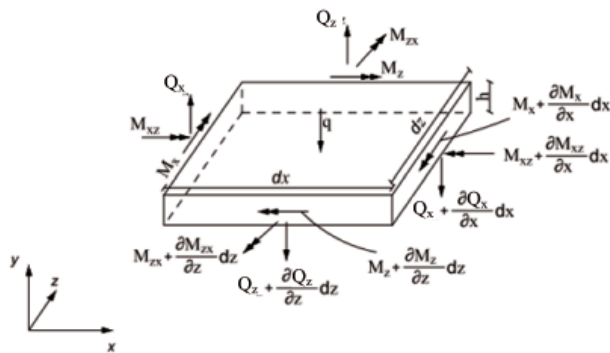


Slika 3. Promatrani dio vitkog čeličnog elementa

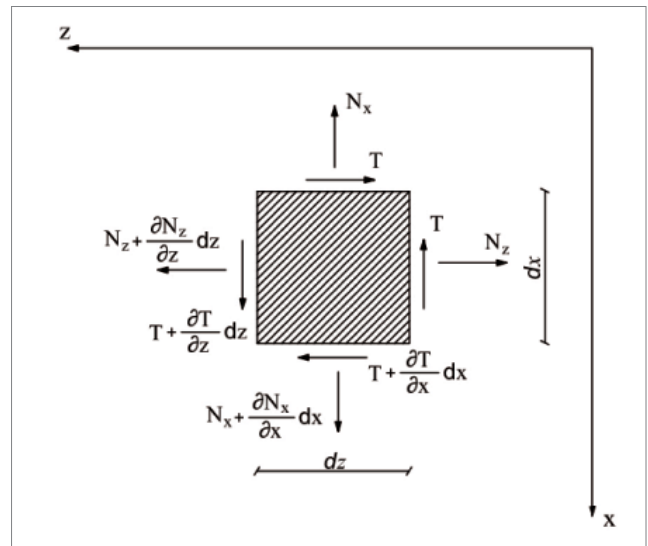
$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dy = \sigma_x \cdot h$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \cdot dy = \sigma_z \cdot h$$

$$T_{xz} = T_{zx} = T = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \cdot dy = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} \cdot dy = \tau_{xz} \cdot h$$



Slika 4. Diferencijalno mali dio hrpta



Slika 5. Srednja ravnina ploče

2.2. Naprezanje u ravni ("ravninsko" naprezanje)

U ovom slučaju na diferencijalno mali element djeluju samo one sile koje se nalaze u srednjoj ravni elementa, slika 5., a to su [6, 8]:

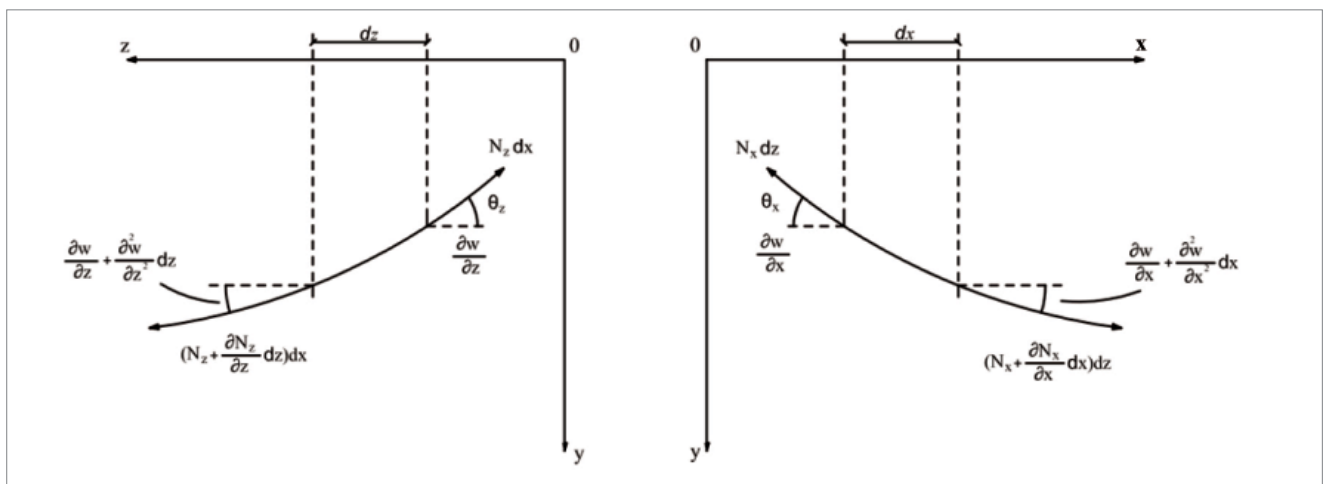
$$N_x, N_z, T_{xz} = T_{zx} = T$$

Ako se razmotri srednja ravnina ploče, slika 5., poprečne sile se dobiju integracijom naprezanja po visini presjeka. Pretpostavi li se da je $dx = dz = 1$, one imaju sljedeće vrijednosti :

Utjecaj uzdužnih sila prikazan je na slici 6. gdje se, s obzirom na to da je θ_x mala veličina, može pretpostaviti:

$$\sin \theta_z \cong \text{tg} \theta_z \cong \theta_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\sin \theta_x \cong \text{tg} \theta_x \cong \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$$



Slika 6. Utjecaj uzdužnih sila

Tada je suma projekcija uzdužnih sila na os y:

$$\sum Y_{(N)} = -N_x \frac{\partial w}{\partial x} \cdot dz + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dz \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) -$$

$$-N_z \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dx + \left(N_z + \frac{\partial N_z}{\partial z} dz \right) dx \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz \right),$$

a nakon sređivanja i zanemarivanja malih veličina višeg reda se dobije:

$$\sum Y_{(N)} = \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) dx \cdot dz. \quad (2)$$

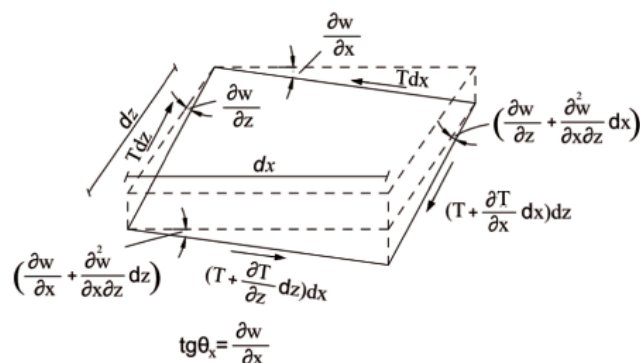
Utjecaj poprečnih sila prikazan je na slici 7. prema kojoj možemo formirati relaciju:

$$\sum Y_{(T)} = -T \frac{\partial w}{\partial x} \cdot dx + \left(T + \frac{\partial T}{\partial z} dz \right) dx \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z} dz \right) -$$

$$-T \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dz + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) dz \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z} dx \right).$$

Nakon što se zanemare utjecaji malih veličina višeg reda, iz prethodne jednadžbe se dobije:

$$\sum Y_{(T)} = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) dx \cdot dz. \quad (3)$$



Slika 7. Utjecaj poprečnih sila

2.3. Naprezanje od savijanja zbrojeno s naprezanjem u ravnini

Sada se može napisati uvjet ravnoteže svih sila koje djeluju na diferencijalno mali element (naprezanje od savijanja zbrojeno s naprezanjem u ravnini) u pravcu osi y, zbroj jednadžbi (1), (2) i (3):

$$\sum Y = \sum Y_{(q)} + \sum Y_{(N)} + \sum Y_{(T)} =$$

$$= q \cdot dx \cdot dz - D \cdot \Delta \Delta w \cdot dx \cdot dz + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) dx dz +$$

$$+ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) dx dz = 0.$$

Množeći ovaj uvjet ravnoteže sa 1/dx dz, dobije se:

$$q - D \cdot \Delta \Delta w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Članovi prethodne jednadžbe

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial z}$$

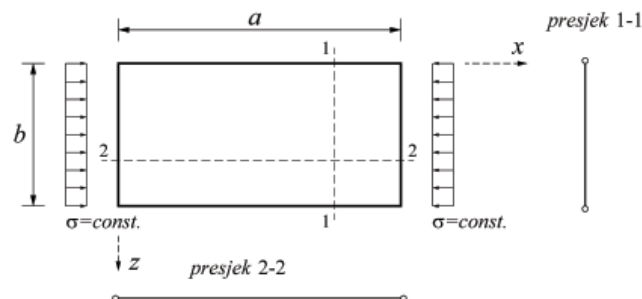
male su veličine višeg reda, koje se zanemaruju, a izostavlja se i poprečno opterećenje q na hrbat (koje u ovom slučaju ne postoji). Pri tome treba imati na umu i **promjenu predznaka uzdužnih sila za slučaj kada su one tlačne**. Na kraju se dobiva jednadžba izbočivanja ploče u obliku:

$$-D \nabla^2 w + \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + N_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (4)$$

Rubni uvjeti za dva osnovna slučaja oslanjanja ploče bit će:

- za zglobno oslonjenu ploču $w = 0$ i $w'' = 0$
- za upetu ploču $w = 0$ i $w' = 0$

Dalje će se razmotriti najjednostavniji slučaj izbočivanja zglobno oslonjene pravokutne ploče, koja predstavlja na primjer hrbat "I" profila, na koju djeluje jedno osno tlačno ravnomjerno raspoređeno opterećenje prema shemi na slici 8.



Slika 8. Zglobno oslonjena pravokutna ploča (na primjer hrbat I - profila) na koju djeluje jedno osno tlačno ravnomjerno raspoređeno opterećenje

Kako je, $N_x = \sigma \cdot h$, $N_z = 0$ i $T = 0$ za slučaj tlačne uzdužne sile (slika 8.), jednadžba (4) se svodi na:

$$D \nabla^2 w + \sigma \cdot h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Rješenje ove jednadžbe tražimo u obliku dvostrukog trigonometrijskog reda:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi z}{a} \cdot \sin \frac{n\pi x}{b}$$

čije su odgovarajuće derivacije:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi z}{a} \cdot \sin \frac{n\pi x}{b} \\ \nabla W &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \cdot \sin \frac{m\pi z}{a} \cdot \sin \frac{n\pi x}{b} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Uvrštavanjem (6) u (5) dobivamo:

$$c_{mn} \left\{ \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] - \frac{\sigma \cdot h}{D} \cdot \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m}{a}\right)^2 \right\} = 0$$

Jednadžba stabilnosti će se napisati za $c_{mn} \neq 0$:

$$\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] - \frac{\sigma_{cr} \cdot h}{D} \cdot \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m}{a}\right)^2 = 0.$$

Iz ovoga je:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \left[m \cdot \frac{b}{a} + \frac{n^2}{m} \cdot \frac{a}{b} \right].$$

Ako se uvedu oznake

$$\alpha = \frac{a}{b} \quad \text{i} \quad \sigma_E = \frac{\pi^2 D}{b^2 h},$$

onda je kritično naprezanje σ_{cr} izraženo preko Eulerovog naprezanja σ_E :

$$\sigma_{cr} = \sigma_E \left(\frac{m}{\alpha} + \alpha \frac{n^2}{m} \right)^2.$$

Ako izraz kojim množimo σ_E označimo sa k_{mn} , kritično naprezanje je:

$$\sigma_{cr} = k_{mn} \cdot \sigma_E \quad (7)$$

$$k_{mn} = \left(\frac{m}{\alpha} + \alpha \frac{n^2}{m} \right)^2.$$

Minimalno kritično naprezanje dobiva se iz uvjeta minimuma vrijednosti k_{mn} uzimajući da je $n = 1$:

$$\frac{\partial k_{m1}}{\partial m} = 0$$

$$\frac{\partial k_{m1}}{\partial m} = 2 \left(\frac{m}{\alpha} + \alpha \frac{1}{m} \right) \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \frac{1}{m^2} \right) = 0,$$

odakle je:

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \frac{1}{m^2} \right) = 0$$

te je:

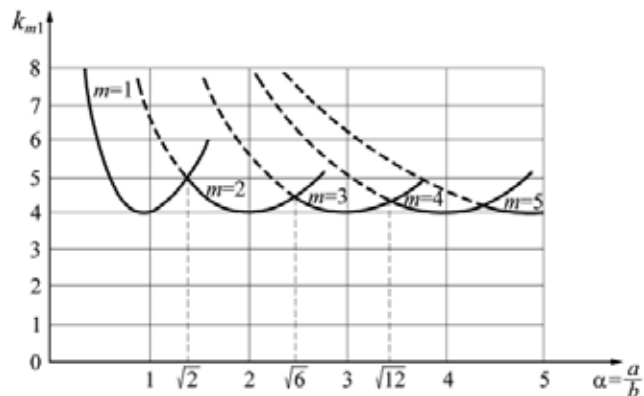
$$\alpha = m = 2,$$

$$k_{m1} = \left(\frac{m}{\alpha} + \alpha \frac{1}{m} \right)^2 = 4.$$

Znači da je u ovom slučaju ($n = 1$):

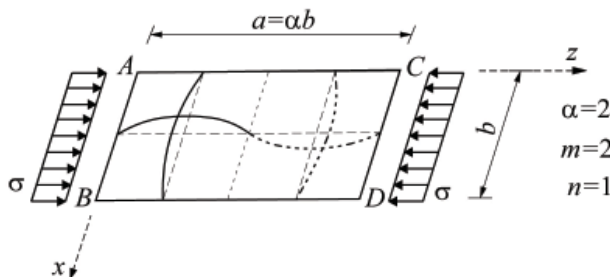
$$\sigma_{cr} = k_{mn} \sigma_E = k_{\sigma} \sigma_E = 4 \sigma_E. \quad (8)$$

Zavisnost k_{m1} i α može se prikazati za pojedine vrijednosti m pomoću krivulja kao na slici 9.:



Slika 9. Dijagram krivulja ovisnosti k_{m1} i α

Očigledno je da se najmanje kritično naprezanje dobiva kada je koeficijent α cijeli broj. Tako na primjer za ploču s odnosom $\alpha = a/b = 2$ i jedno osno tlačno ravnomjerno opterećenje dobiva se oblik izbočivanja koji se sastoji od dva poluvala, slika 10.



Slika 10. Oblik izbočivanja

3. Plošni elementi u tlaku prema EN 1993-1-1 i EN 1993-1-5

Iz opće teorije stabilnosti plošnih nosača (potpoglavlje 1.2.) pokazano je da se elastično kritično naprezanje izbočivanja ploče izračunava iz sljedećeg izraza:

$$\sigma_{cr} = \frac{k_{\sigma} \cdot \pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{t}{b} \right)^2 = k_{\sigma} \cdot \sigma_E, \quad (9)$$

gdje je:

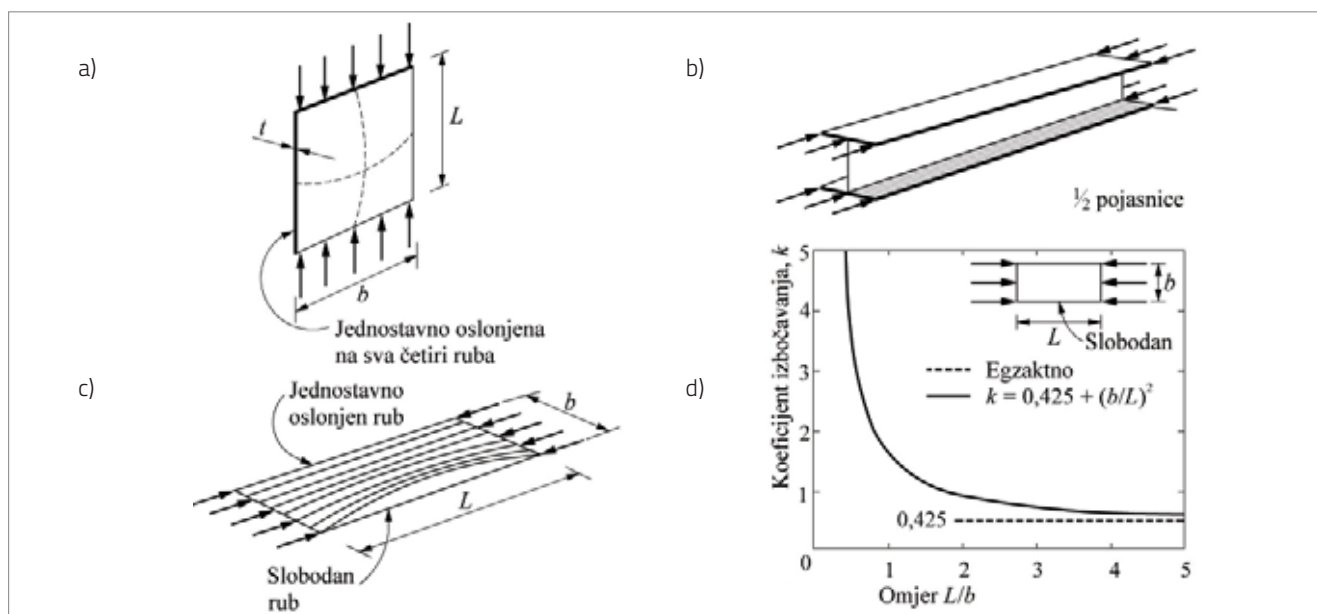
k_{σ} - faktor (koeficijent) izbočivanja ploče koji uzima u obzir uvjete oslanjanja, raspodjelu naprezanja u poprečnom presjeku (zbog čega je u indeksu simbol σ) i odnos duljine i širine ploče, slike 8. i 9.a;

t - debljina čeličnog plošnog elementa (napomena: u razmatranjima izloženim do ovog prethodnog izraza se rabila opća oznaka h za debljinu elementa, što je uobičajen simbol u tehničkoj mehanici, a u nastavku će se rabiti oznaka t za debljinu čeličnog plošnog elementa, kako je uvedeno u konstrukcijskim euronormama za čelične konstrukcije [2, 4]);

σ_E - idealno naprezanje izbočivanja trake debljine t , širine b i duljine L ;
 ν - Poissonov koeficijent;
 E - modul elastičnosti.

Otvoreni poprečni presjeci sastavljeni su od više plošnih elemenata koji su slobodni po jednom uzdužnom rubu i u pravilu su vrlo dugački u odnosu na širinu, slika 11.b. Oblik izbočivanja takvog vanjskog elementa prikazan je na slici 11.c. Ovisnost odnosa duljine i širine elementa L/b i faktora izbočivanja k_σ za dugački tanki vanjski element slobodan po jednom rubu prikazana je na slici 11.d, iz koje se uočava da faktor izbočivanja k_σ teži graničnoj vrijednosti 0,425 s povećanjem odnosa L/b . Faktor izbočivanja k_σ zavisi od rubnih uvjeta i odnosa dimenzija ploče.

Vrijednosti faktora izbočivanja k_σ za nekoliko najčešćih oblika naprezanja na rubovima plošnih elemenata dane su u tablici 2. [1], i to za velike omjere L/b unutarnjih i vanjskih elemenata. Prvi korak pri određivanju faktora izbočivanja k_σ je razmatranje rubnih uvjeta elementa, tj. utvrđivanje radi li se o unutarnjem ili vanjskom elementu u tlaku. U drugom koraku uzima se u obzir raspodjela naprezanja po presjeku elementa preko omjera naprezanja u rubnim vlakancima $\psi = \sigma_2 / \sigma_1$. Najuočividniji slučajevi su s elementom u tlaku s jednolikom raspodjelom naprezanja ($\sigma_2 = \sigma_1$) kada je $\psi=1$ i elementom izloženom čistom savijanju s naprezanjima u rubnim vlakancima jednakim, ali suprotnih predznaka $\sigma_2 = -\sigma_1$, kada je $\psi=-1$.
 Pokazano je da je za rubne uvjete i opterećenje kao na slici 8. najprije analitički dobivena vrijednost faktora izbočivanja



Slika 11. Ponašanje plošnih elemenata u tlaku [1]

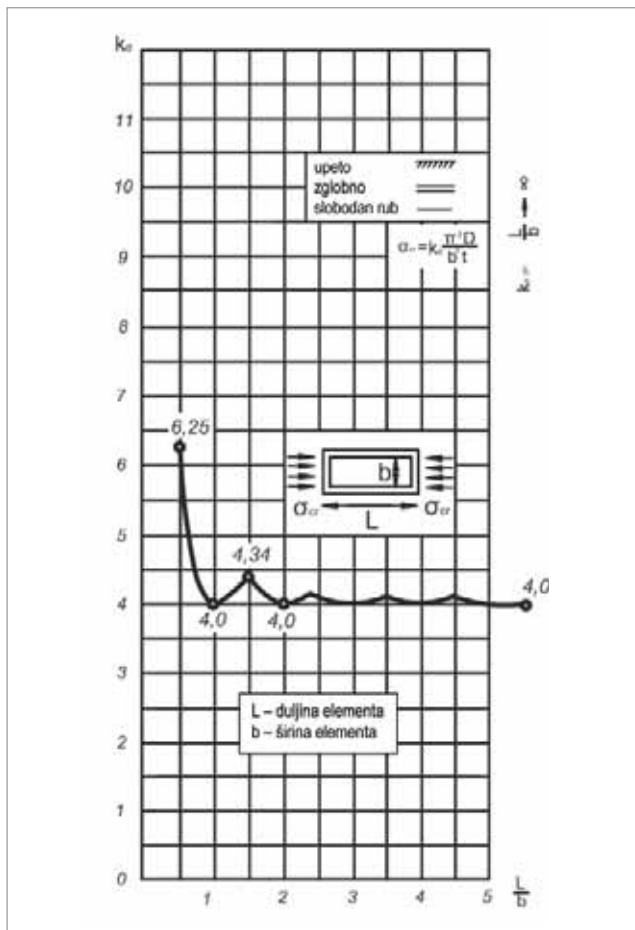
Tablica 2. Vrijednosti faktora izbočivanja k_σ za nekoliko oblika raspodjele naprezanja na rubovima plošnih elemenata [1]

$\psi = \sigma_{2/1}$	+1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1
Unutarnji element (I)	$k_\sigma = 4,0$	$k_\sigma = 8,2 / (1,05 + \psi)$	$k_\sigma = 7,81$	$k_\sigma = 7,81 + 6,29\psi + 9,78\psi^2$	$k_\sigma = 23,9$
Vanjski element (II)	$k_\sigma = 0,43^*$	$k_\sigma = 0,57 - 0,21 + 0,07\psi^2$	$k_\sigma = 0,57$	$k_\sigma = 0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$	$k_\sigma = 0,85$
Vanjski element (III)	$k_\sigma = 0,43^*$	$k_\sigma = 0,578 / (\psi + 0,34)$	$k_\sigma = 1,70$	$k_\sigma = 1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2$	$k_\sigma = 23,8$

*približno dobiveno i na slici 11.d.

$k_\sigma=4,0$, a ista je vrijednost za unutarnji element poprečnog presjeka i $\psi = \sigma_2 / \sigma_1 = 1$ dana u tablici 2. i prikazana na slici 12.

Na slici 12. prikazan je jedan od dijagrama preuzet iz literature [9] pomoću kojih se mogu odrediti približne vrijednosti faktora izbočivanja k_σ za razne rubne uvjete i različite odnose duljine i širine ploče. Dijagram je dan samo za slučaj $\sigma = const.$, za plošne nosače bez ojačanja limova, te je dobiven primjenom prethodno iznesene teorije tankih ploča.



Slika 12. Vrijednosti faktora izbočivanja k_σ za tlačno opterećen plošni nosač sa svih strana zglobno oslonjen

4. Proračun plošnih nosača opterećenih u svojoj ravnini primjenom EBPlate Version 2.01

U drugom poglavlju je izložen jedan analitički način dobivanja faktora izbočivanja i kritičnog naprezanja, da bi se pokazala složenost rješavanja i za ovako relativno jednostavan primjer. Postoje i drugačiji analitički načini određivanja kritičnog naprezanja, na primjer primjenom *Rayleigh-Ritzove* energetske metode, pri čemu su oblici izvijanja također dobiveni primjenom Fourierovih redova. Ova energetska metoda primjenjena je u programu EBPlate [3] za izračun minimalne vrijednosti faktora kritičnog naprezanja φ_{cr} .

U programu EBPlate korištene su posebne programske cjeline, kao na primjer LAPACK (engl. *Linear Algebra PACKage*) za rješenje problema vlastitih funkcija [5, 10]. Rezultati dobiveni primjenom programa EBPlate provjereni su uspoređivanjem s rezultatima koji su dobiveni numeričkom analizom primjenom metode konačnih elemenata (MKE), kojom se računalo oko 330 primjera za navedenu usporedbu.

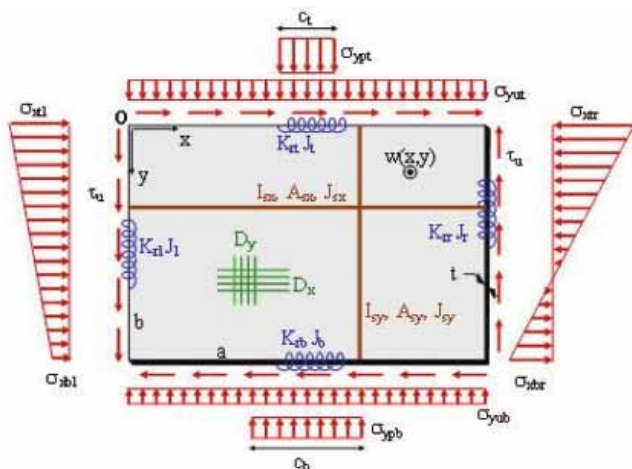
Europski centar za normizaciju CEN prepoznao je važnost normizacije proračuna i dimenzioniranja tlačno opterećenih plošnih nosača, te je uvedena posebna norma EN 1993-1-5 [2] s nazivom PLATED STRUCTURAL ELEMENTS, za čiju primjenu su izrađeni posebni komentari i riješeni primjeri [11, 12]. Budući da je primjena te norme relativno zahtjevnija, urađen je softver s nazivom EBPlate [3] za lakšu uporabu navedene norme, koji se temelji na teoriji tankih ploča opterećenih u svojoj ravnini. Softver određuje faktore izbočivanja i kritična naprezanja vezano za elastično izbočivanje plošnih nosača različitih rubnih uvjeta, s ojačanjem ili bez ojačanja limova opterećenih u svojoj ravnini.

Program EBPlate proračunava ploče nepromjenljive debljine, izotropnih ili anizotropnih karakteristika, slika 13. U nastavku će se navesti osnovni ulazni parametri za primjenu toga programa te nabrojiti što se tim programom dobiva kao rezultat:

- najprije se zadaju rubni uvjeti ploče, a tri su moguća slučaja: zglobno oslonjen rub, upeti rub ili elastično pridržanje definirano prema krutosti na savijanje i torzijskoj krutosti,
- definiraju se uzdužna i poprečna ojačanja s istim ili različitim karakteristikama (ortotropne ploče),
- definiraju se mogućnosti primjene ojačanja sa zatvorenim poprečnim presjekom (na primjer trapezni poprečni presjek),
- zadaje se oblik raspodjele vanjskog naprezanja (σ) s mogućnošću unošenja podataka raspodjele naprezanja iz nekog drugog softvera,
- program izračunava minimalni kritični faktor φ_{cr} kojim se množi vanjsko naprezanje na ploču (σ) da bi se dobila vrijednost kritičnog naprezanja σ_{cr} ,
- programom se nalaze svi oblici izbočivanja kojima su pridružene vrijednosti kritičnog faktora,
- trodimenzionalan prikaz oblika izbočenog modela,
- ispis liste rezultata dobivenih izračunom, itd.

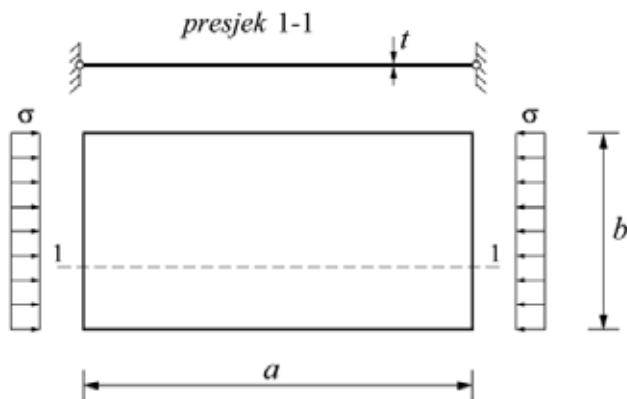
Znači, primjenom ovoga softvera uspostavljena je relacija:

$$\sigma_{cr} = k_\sigma \cdot \sigma_E = \varphi_{cr} \cdot \sigma \quad (10)$$



Slika 13. Općeniti prikaz ulaznih podataka u programu EBPlate

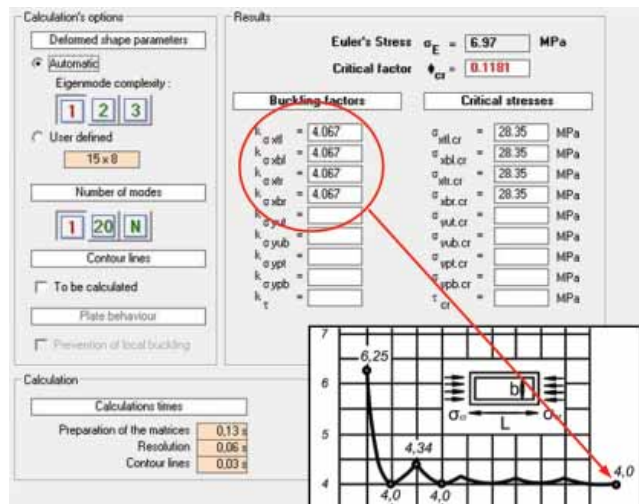
U nastavku je dan primjer izračuna faktora izbočivanja plošnog čeličnog elementa na slici 14. primjenom specijaliziranog softverskog paketa EBPlate. Najprije se zadaju dimenzije elementa, svojstva čelika i uvjeti oslanjanja. Plošni element na slici 14. slobodno je oslonjen na sve četiri strane bez poprečnih i uzdužnih ukrućenja, što znači da je identičan prije analitički urađenom primjeru prikazanom na slici 8. Dimenzije su $a = 2900 \text{ mm}$, $b = 1650 \text{ mm}$, $t = 10 \text{ mm}$. Element je izložen tlačnom naprezanju $\sigma = 240 \text{ N/mm}^2$.



Slika 14. Definiranje dimenzija ploče, rubnih uvjeta i opterećenja

Kako bi se rezultat izračuna mogao usporediti s analitičkim rješenjem danim u potpoglavlju 1.2, na ovu pravokutnu ploču je također primijenjeno jedno osno tlačno ravnomjerno raspoređeno opterećenje. Komparativni prikaz rezultata dobivenih za ovaj primjer analitički i uporabom softvera EBPlate prikazan je na slici 15.

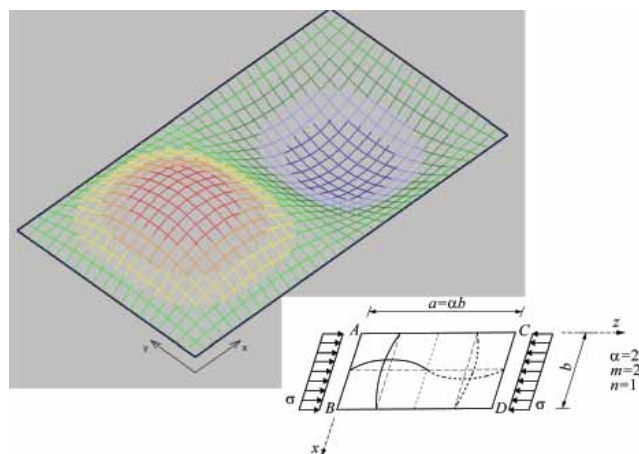
Kritično naprezanje dato ovim softverom izračunano je pomoću teorije linearnog elastičnog izbočivanja idealiziranih plošnih nosača tako da nema ograničavanja naprezanja kao kod realnih elemenata.



Slika 15. Prikaz rezultata izračuna primjenom računalnog programa: faktori izbočivanja k_σ , faktori kritičnog naprezanja ϕ_{cr} i kritična naprezanja; usporedba s faktorom izbočivanja dobivenim analitički

Faktor izbočivanja u ovom primjeru ima vrijednost $k_\sigma = 4,067$ koja je približno ista vrijednosti dobivenoj analitičkim postupkom. Vrijednost kritičnog naprezanja u ovom slučaju ima vrijednost (slika 15.):

$$\sigma_{cr} = k_\sigma \cdot \sigma_E = \phi_{cr} \cdot \sigma = 4,067 \cdot 6,97 = 0,1181 \cdot 250 = 28,35 \text{ MPa}$$



Slika 16. Oblik izbočivanja dobiven primjenom računalnog programa; usporedba s analitičkim prikazom

Primjenom programa EBPlate dobiven je trodimenzionalan prikaz oblika izbočenog modela plošnog elementa. Kako je na slici 16. pokazano, izbočeni oblik ima dva vala u uzdužnom smjeru ($m=2$) i jedan val u poprečnom smjeru ($n=1$), te se rezultat podudara s analitičkim prikazom rješenja na slici 10. Naravno da primjeri u praksi nisu ovako jednostavni kao primjer predložen na slikama 14. do 16., kojim je samo ilustrirano kako se primjenom programa EBPlate dolazi do vrijednosti faktora izbočivanja i kritičnog naprezanja, bez analitičkog rješavanja diferencijalne jednačbe (4) za neki konkretni slučaj. Važnost

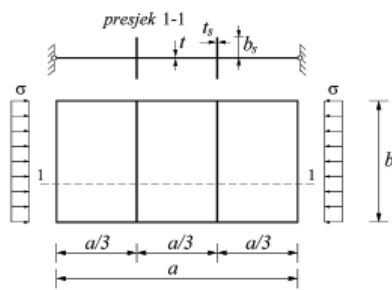
primjene programa EBPlate upravo je za izračun faktora izbočavanja i kritičnog naprezanja složenijih slučajeva u praksi, s ortotropnim pločama, kada je mnogo teže analitički odrediti vrijednosti faktora izbočavanja i kritičnog naprezanja. U nastavku će se prikazati rješenja za takve složenije slučajeve. Za sve njih se najprije zadaje geometrija plošnog elementa, rubni uvjeti, opterećenja i položaj ukrućenja. Tada se dobivaju: vrijednosti faktora izbočavanja k_{σ} , faktora kritičnog naprezanja ϕ_{cr} za slučaj lokalnog izbočavanja, te za slučaj izbočavanja cijelog plošnog elementa s ukrućenjima.

U nastavku će se pokazati uporaba programa EBPlate na nekoliko karakterističnih primjera. Prvi primjer je plošni element slobodno oslonjen na sve četiri strane s poprečnim ukrućenjima na razmaku $a/3$ (obostrano). Dimenzije su $a = 2900$ mm,

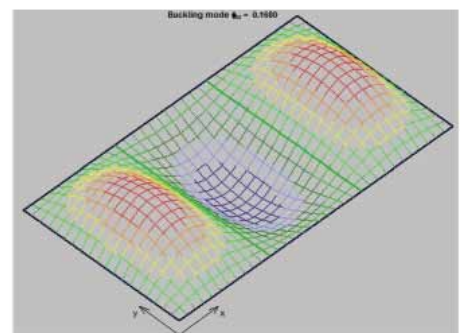
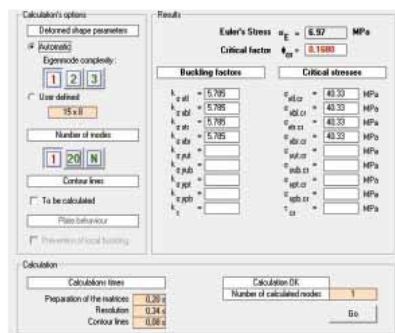
$b = 1650$ mm, $t = 10$ mm, $b_s = 135$ mm, $t_s = 8$ mm. Element je izložen tlačnom naprezanju $\sigma = 240$ N/mm², slike 17. i 18.

Drugi primjer je plošni element slobodno oslonjen na sve četiri strane s uzdužnim ukrućenjem na razmaku $b/2$ (jednostrano). Dimenzije su $a = 2320$ mm, $b = 740$ mm, $t = 15$ mm, $b_s = 135$ mm, $t_s = 8$ mm. Element je izložen tlačnom naprezanju $\sigma = 230$ N/mm², slike 19. i 20.

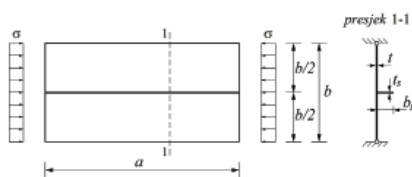
Treći primjer je plošni element slobodno oslonjen na sve četiri strane s uzdužnim ukrućenjem (trapezni poprečni presjek - jednostrano). Dimenzije su $a = 3600$ mm, $b = 1700$ mm, $t = 12$ mm, $b_1 = 150$ mm, $h_s = 140$ mm, $b_2 = 85$ mm, $b_3 = 630$ mm, $c = 120$ mm, $t_s = 8$ mm. Element je izložen lokalnom tlačnom naprezanju $\sigma = 470$ N/mm², slike 21. i 22.



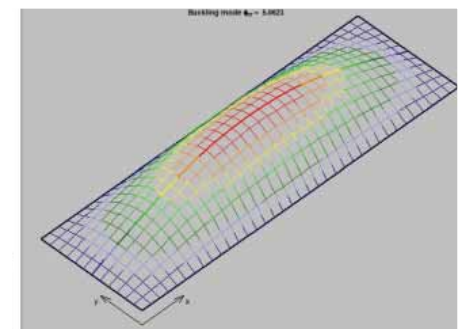
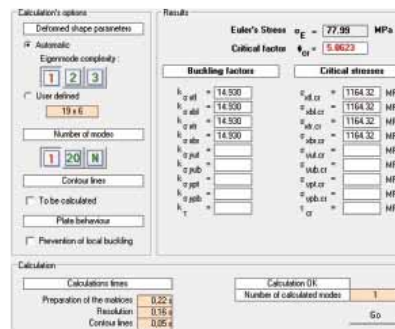
Slika 17. Definiranje dimenzija ploče, rubnih uvjeta i opterećenja



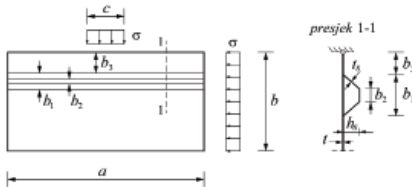
Slika 18. Vrijednosti faktora izbočavanja k_{σ} , faktora kritičnog naprezanja ϕ_{cr} , kritičnog naprezanja i oblik lokalnog izbočavanja



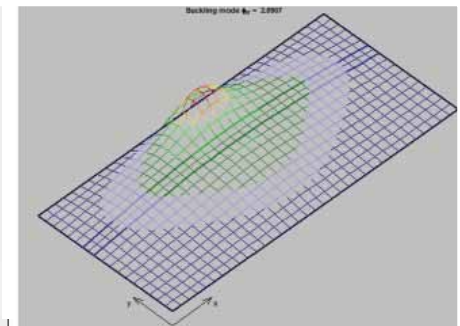
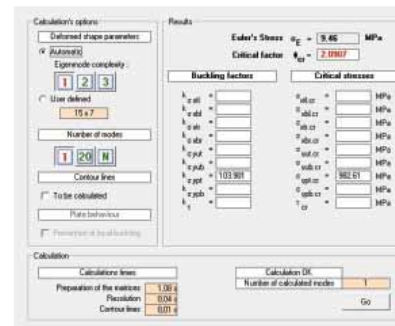
Slika 19. Definiranje dimenzija ploče, rubnih uvjeta i opterećenja



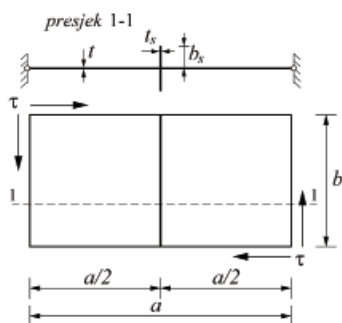
Slika 20. Vrijednosti faktora izbočavanja k_{σ} , faktora kritičnog naprezanja ϕ_{cr} , kritičnog naprezanja i oblik lokalnog izbočavanja



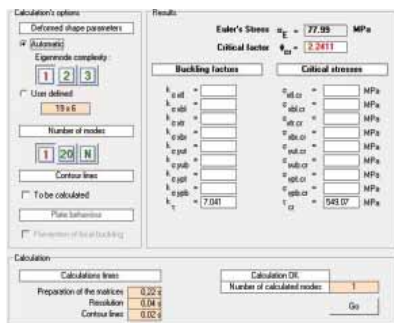
Slika 21. Definiranje dimenzija ploče, rubnih uvjeta i opterećenja



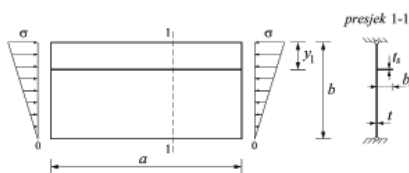
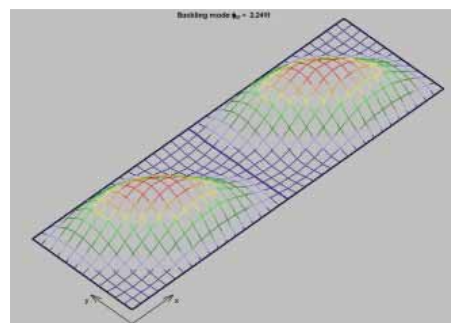
Slika 22. Vrijednosti faktora izbočavanja k_{σ} , faktora kritičnog naprezanja ϕ_{cr} , kritičnog naprezanja i oblik lokalnog i globalnog izbočavanja



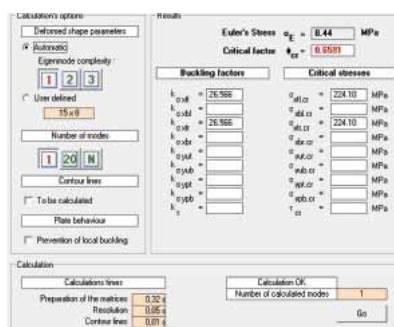
Slika 23. Definiranje dimenzija ploče, rubnih uvjeta i opterećenja



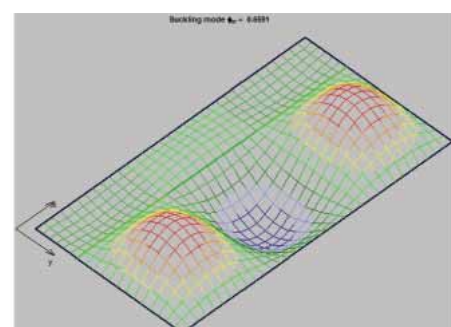
Slika 24. Vrijednosti faktora izbočivanja k_{σ} , faktora kritičnog naprezanja ϕ_{cr} , kritičnog naprezanja i oblik lokalnog izbočivanja



Slika 25. Definiranje dimenzija ploče, rubnih uvjeta i opterećenja



Slika 26. Vrijednosti faktora izbočivanja k_{σ} , faktora kritičnog naprezanja ϕ_{cr} , kritičnog naprezanja i oblik lokalnog izbočivanja



Četvrti primjer je plošni element slobodno oslonjen na sve četiri strane s poprečnim ukrućenjem na razmaku $a/2$ (obostrano). Dimenzije su: $a = 2320$ mm, $b = 740$ mm, $t = 15$ mm, $b_s = 135$ mm, $t_s = 8$ mm. Element je izložen posmičnom naprezanju $\tau = 245$ N/mm², slike 23. i 24.

Peti primjer je plošni element slobodno oslonjen na sve četiri strane s jednim uzdužnim ukrućenjem (jednostrano). Dimenzije su $a = 3300$ mm, $b = 1800$ mm, $t = 12$ mm, $y_1 = 510$ mm, $b_s = 220$ mm, $t_s = 8$ mm. Element je izložen savijanju s naprezanjem na gornjem rubu $\sigma = 340$ N/mm², slike 25. i 26.

U prikazanim slučajevima dobivene su povećane vrijednosti faktora izbočivanja, a time i veće vrijednosti kritičnih naprezanja (čak veće i od granice popuštanja f_t), jer su uzeta u obzir sva ojačanja plošnog nosača kao cjeline. Svrha je ukrućenja da povećaju nosivost ploče s obzirom na problem izbočivanja. Bitno je da se ukrućenja postave na ona mjesta gdje su najdjelotornija. Ovim primjerima je pokazano da su kod tlačnih naprezanja najdjelotornija uzdužna ukrućenja, kod posmičnih naprezanja poprečna ukrućenja, a kod naprezanja pri savijanju uzdužna ukrućenja na udaljenosti oko $d/4$ od tlačnog ruba.

Ploče koje su izvedene s ukrućenjima mogu pokazati znakove lokalne ili globalne nestabilnosti. Znači, ovisno o geometrijskim i statičkim veličinama može se pojaviti lokalno izbočivanje ploče između ukrućenja (slika 18.), izbočivanje dijela ukrućene ploče ako postoje uzdužna i poprečna ukrućenja te globalno

izbočivanje ukrućene ploče (slika 20.). Prema definiciji kritičnog opterećenja [5], uvijek se uzima kao mjerodavna najmanja vrijednost kritičnog naprezanja.

5. Zaključak

Za sve važne pojmove koji proizlaze iz teorije elastičnosti i teorije plastičnosti, a koji su uvedeni u konstrukcijske euronorme, trebalo bi posebnim objašnjenjima pokazati kako su ti pojmovi izvorno nastali (na primjer, u [1] i [13] su prikazana dva različita načina dobivanja izraza za vrijednost kritičnog momenta bočno torzijskog izvijanja štapa, koji se kao gotovo rješenje navodi u konstrukcijskoj euronormi [4]). U ovom radu je primjenom opće teorije tankih plošnih nosača pokazano kako su nastale vrijednosti faktora izbočivanja k_{σ} , faktora kritičnog naprezanja ϕ_{cr} i kritičnog naprezanja. Primjenom dobivene jednadžbe izbočivanja ploče na najjednostavnijem slučaju izbočivanja zglobno oslonjene pravokutne ploče na koju djeluje jedno osno tlačno ravnomjerno raspoređeno opterećenje analitički je dobiven faktor izbočivanja k_{σ} . Približno ista vrijednost faktora izbočivanja k_{σ} za navedene rubne uvjete i opterećenje može se preuzeti iz danih dijagrama u literaturi [9]. Primjenom specijaliziranog softverskog paketa proveden je izračun plošnog elementa s istim rubnim uvjetima i istim opterećenjem kao za gore navedeni slučaj te su dobiveni rezultati koji odgovaraju analitičkom rješenju. Prednost primjene softvera EBPlate je u tomu da se njime mogu dobiti vrijednosti faktora izbočivanja i kritičnog

naprezanja za proizvoljne rubne uvjete i opterećenje, bez ojačanja ili s ojačanjima na plošnom nosaču. Znači dobiva se rješenje ne samo za slučajeve dane u tablici 1. već i za slučajeve proizvoljnih načina oslanjanja s ukrućenjima, te su tako obuhvaćeni svi mogući slučajevi iz konstrukcijskih euronormi [2].

Do sada je u literaturi prikazan ograničeni broj urađenih primjera koji su dobiveni analitičkim rješavanjima diferencijalne jednadžbe izbočivanja tankih ploča. Primjenom energetskih metoda problem izbočivanja je trajno riješen, a dobiveni rezultati primjenom softvera EBPlate su prikazani tako da se na relativno jednostavan način dobiju vrijednosti faktora

izbočivanja, faktora kritičnog naprezanja, kritično naprezanje i oblik lokalnog izbočivanja za bilo koje rubne uvjete, za proizvoljno opterećenje i proizvoljan položaj ukrućenja.

Ovim radom je također pokazano da se bez poznavanja tehničke mehanike ne mogu razumjeti važni pojmovi koji su uvedeni u konstrukcijske euronorme iz čeličnih konstrukcija.

Napomena:

Istraživanja prezentirana u ovom radu rađena su u sklopu znanstvenog projekta "Razvoj konstrukcija povećane pouzdanosti obzirom na potres" (114-0821466-1470) koji financira Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

LITERATURA

- [1] Androić, B., Dujmović, D., Džeba, I.: *Čelične konstrukcije 1*, IA projektiranje, Zagreb, 2009.
- [2] Eurocode 3 – *Design of steel structures – Part 1-5: Plated structural elements*, EN 1993-1-5:2006 E, CEN – European Comitee for Standardization, 2006.
- [3] Kompjutorski softver: EBPlate Version 2.01, 2007. www.cticm.com.
- [4] Eurocode 3 – *Design of steel structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings*, EN 1993-1-1:2005 E, CEN – European Comitee for Standardization, 2005.
- [5] Čaušević, M.: *Statika i stabilnost konstrukcija*, Školska knjiga, Zagreb, 2003.
- [6] Timoshenko, S., Gere, J.: *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961.
- [7] Markulak, D.: *Posebna poglavlja čeličnih konstrukcija*, Građevinski fakultet Sveučilišta Josip Juraj Strossmayer u Osijeku, Osijek, 2010.
- [8] Hajdin, N.: *Teorija površinskih nosača – ploče napregnute u svojoj ravnini*, Građevinski fakultet, Beograd, 1979.
- [9] Umanski, A.: *Konstrukterski priručnik (izabrana poglavlja)*, Građevinska knjiga, Beograd, 1980.
- [10] Kompjutorski softver: LAPACK, www.netlib.org/lapack/.
- [11] Beg, D., Kuhlmann, U., Davaine, L. and Braun, B.: *Design of Plated Structures*, ECCS Eurocode Design Manuals, Ernst & Sohn A Wiley Company, 2010.
- [12] Johansson, B., Maquoi, R., Sedlacek, G., Müller, C., Beg, D.: *Commentary and Worked Examples to EN 1993-1-5 "Plated Structural Elements"*, CEN – European Comitee for Standardization, 2007.
- [13] Markulak, D.: *Proračun čeličnih konstrukcija prema EN 1993-1-1*, Građevinski fakultet Sveučilišta Josip Juraj Strossmayer u Osijeku, Osijek, 2008.