

Primljen / Received: 19.1.2013.

Ispravljen / Corrected: 8.5.2013.

Prihvaćen / Accepted: 15.5.2013.

Dostupno online / Available online: 10.6.2013.

# Analiza stabilnosti armiranobetonskih složenica

## Autori:



Prof.dr.sc. **Dragan Milašinović**, dipl.ing.građ.  
Sveučilište u Novom Sadu  
Građevinski fakultet u Subotici  
[ddmil@gf.uns.ac.rs](mailto:ddmil@gf.uns.ac.rs)



Dr.sc. **Danica Goleš**, dipl.ing.građ.  
Sveučilište u Novom Sadu  
Građevinski fakultet u Subotici  
[golesd@yahoo.com](mailto:golesd@yahoo.com)

Izvorni znanstveni rad

**Dragan Milašinović, Danica Goleš**

## Analiza stabilnosti armiranobetonskih složenica

U radu je prikazana analiza stabilnosti armiranobetonskih složenica. Ove konstrukcije predstavljaju posebnu vrstu ljuski za koje se i geometrija i svojstva materijala mogu smatrati konstantnim duž glavnog pravca, dok samo raspodjela opterećenja može varirati. Poluanalitička harmonijski spojena metoda konačnih traka (HSMKT) primjenjuje se za rješavanje velikih progiba i problema poslije izvijanja ili na obje pojave istodobno. To je osobito važno za ljuske koje imaju veliki omjer raspona i širine

### Ključne riječi:

armiranobetonske složenice, analiza stabilnosti, metoda konačnih traka

Original scientific paper

**Dragan Milašinović, Danica Goleš**

## Stability analysis of reinforced concrete prismatic shell structures

Stability analysis of prismatic reinforced concrete shells is presented in the paper. These structures are special shells for which both geometry and material properties can be considered as constant along the main direction, while only the loading distribution may vary. A semi-analytical harmonic coupled finite strip method (HCFSM) is used to solve the large deflection and post-buckling problems, or both actions simultaneously. This is particularly important for shells having large span-to-width ratios.

### Key words:

prismatic reinforced concrete shells, stability analysis, finite strip method

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

**Dragan Milašinović, Danica Goleš**

## Stabilitätsanalyse prismatischer Flächentragwerke aus Stahlbeton

In dieser Arbeit ist die Stabilitätsanalyse prismatischer Flächentragwerke aus Stahlbeton dargestellt. Diese Tragwerke werden als eine besondere Art von Schalenkonstruktionen angesehen, bei denen die Geometrie und die Materialeigenschaften als konstant entlang einer Hauptrichtung angenommen werden können, während die Lastverteilung variieren kann. Die halbanalytische Methode harmonisch verbundener finiter Streifen wird angewandt, um große Verformungen und das Nachbeulverhalten, oder beide Erscheinungen zugleich, zu berücksichtigen. Dies ist von Bedeutung insbesondere für Schalenträgerwerke großen Verhältnisses zwischen Reichweite und Breite.

### Schlüsselwörter:

prismatische Flächentragwerke aus Stahlbeton, Stabilitätsanalyse, Finite-Streifen-Methoden

### 1. Uvod

Projektiranje armiranobetonskih složenica obuhvaća dva aspekta, normativni i proračunski. Svi konstrukcijski normativi diljem svijeta sada se temelje na djelomično vjerojatnom pristupu graničnog stanja. U mnogim slučajevima učinkovito projektiranje armiranobetonskih složenica može se temeljiti na pretpostavci nelinearnog odgovora na opterećenja, bilo geometrijske, bilo kombinirane geometrijsko-fizikalne naravi. S modernim trendom korištenja tankih ploča u naboranim konstrukcijama, izrađenim od kompozitnih materijala (npr. armiranog betona), predviđanje geometrijski nelinearnog elastičnog ponašanja postaje sve značajnije.

Razvoj računalnih tehnika i programa omogućuje analizu složenih matematičkih modela kojima se sve vjernije modeliraju stvarne konstrukcije. Metoda konačnih traka (MKT) primjenjuje se za rješavanje brojnih problema u mehanici kontinuuma [1-3]. Ta je metoda, razvijena prvo u kontekstu analize savijanja tanke ploče, polu analitički postupak konačnih elemenata. U linearno elastičnoj analizi, ona koristi svojstvo ortogonalnosti harmonijskih funkcija u formuliranju matrice krutosti, koja postaje dijagonalna blok-matrica, čime se dvodimenzionalni problemi raščlanjuju u nekoliko nezavisnih jednodimenzionalnih problema. Daljnje prednosti metode odnose se na mogućnost modeliranja pomoću malog broja harmonika.

MKT je jedan od mnogih postupaka koji se mogu koristiti za analizu problema velikih otklona i post-globalno izvijajućeg ponašanja naboranih konstrukcija [4-6]. Međutim, pri proračunu geometrijske matrice krutosti, integrali sadrže proizvode trigonometrijskih funkcija s eksponentima višeg reda, te stoga svojstva ortogonalnosti više ne vrijede. Svi harmonici su spojeni, te su red i širina pojasa matrice krutosti proporcionalni broju korištenih harmonika. Izvorno predložena i implementirana u kontekstu posebnog sekvencijalnog programskog paketa [3], HSMKT formulacija je često korištena i potvrđena [7, 8].

### 2. Harmonijski spojena analiza stabilnosti konačnih trakama

#### 2.1. Nelinearne geometrijske veze uključene u konačne trake

Nelinearne geometrijske veze u konačnim trakama mogu se napisati kao kombinacija elastičnog ravnog stanja napreznja i Kirchhoff-Loveove teorije ploča. Međutim, nisu svi nelinearni članovi istog značenja. Ako je sklop ploča dug, nelinearni članovi koji uključuju komponentu  $v_0$  su zanemarivi, a u mnogim slučajevima se mogu zanemariti i članovi koji sadrže komponentu  $u_0$ . U lokalnim modovima relevantni su samo članovi nelinearni po  $w$ . Nelinearne geometrijske veze se usvajaju u sljedećem obliku:

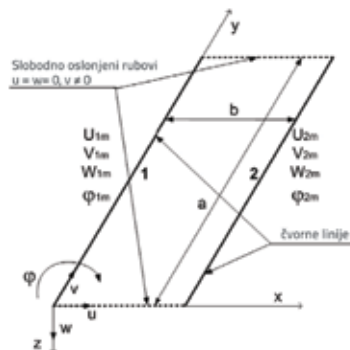
$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + 1/2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 1/2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + 1/2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + 1/2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{1}$$

gdje su  $u, v$  i  $w$  pomaci proizvoljne točke u  $x, y$  i  $z$  pravcu, dok su  $u_0, v_0$  i  $w_0$  pomaci točke srednje ravnine, za  $z=0$ . Dodani nelinearni doprinosi u jednadžbi (1) mogu biti značajni u vrsti problema kakav se razmatra u ovom istraživanju, pri čemu pomaci  $u$  i  $w$  traka mogu imati isti red veličine zbog velikih pomaka čvornih linija. U MKT, koji kombinira elemente klasične Ritzove i metode konačnih elemenata, opći oblik funkcije pomaka se može napisati kao proizvod polinoma i trigonometrijskih funkcija

$$f = Cq = \sum_{m=1}^r Y_m(y) \sum_{n=1}^s N_n(x) q_{mn} \tag{2}$$

gdje su  $Y_m(y)$  osnovne funkcije u  $y$ -pravcu a  $N_n(x)$  interpolacijske funkcije u  $x$ -pravcu. Lokalne stupnjeve slobode (SS) definiramo kao pomake i rotaciju čvorne linije (SS=4), kao što je prikazano na slici 1. Stupnjevi slobode također se nazivaju generalizirane koordinate. Sljedeće aproksimativne funkcije se koriste za slobodno oslonjenu traku ravne ljsuske:

$$\begin{aligned} u_0 &= A_m^u q_m^u = \sum_{m=1}^r Y_m^u N_m^u q_m^u = \sum_{m=1}^r Y_m^u \left[ 1 - \frac{x}{b} \frac{x}{b} \right] q_m^u, \\ v_0 &= A_m^v q_m^v = \sum_{m=1}^r \frac{a}{m\pi} Y_m^v N_m^v q_m^v = \sum_{m=1}^r \frac{a}{m\pi} Y_m^v \left[ 1 - \frac{x}{b} \frac{x}{b} \right] q_m^v, \\ w &= A_m^w q_m^w = \sum_{m=1}^r Y_m^w N_m^w q_m^w = \sum_{m=1}^r Y_m^w [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] q_{m,1-4}, \\ N_1(x) &= 1 - 3 \left( \frac{x}{b} \right)^2 + 2 \left( \frac{x}{b} \right)^3, \quad N_2(x) = b \left[ \frac{x}{b} - 2 \left( \frac{x}{b} \right)^2 + \left( \frac{x}{b} \right)^3 \right], \\ N_3(x) &= 3 \left( \frac{x}{b} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{b} \right)^3, \quad N_4(x) = b \left[ - \left( \frac{x}{b} \right)^2 + \left( \frac{x}{b} \right)^3 \right], \\ q_{m,1-4} &= \begin{bmatrix} w_{1m} \\ \varphi_{1m} \\ w_{2m} \\ \varphi_{2m} \end{bmatrix}, \quad q_m^u = \begin{bmatrix} u_{1m} \\ u_{2m} \end{bmatrix}, \quad q_m^v = \begin{bmatrix} v_{1m} \\ v_{2m} \end{bmatrix} \\ Y_m^u(y) &= \sin(m\pi y/a) = Y_{m,1}(y), \quad Y_m^v(y) = \frac{dY_{m,1}^u}{dy} = (m\pi/a) \cos(m\pi y/a), \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{3}$$



Slika 1. Konačna traka ravne ljsuske

Za drugačije uvjete oslanjanja izvedene su osnovne funkcije  $Y(y)$  iz rješenja diferencijalne jednadžbe vibracija grede:

$$\frac{d^4 Y_w(y)}{dy^4} - Y_w(y) \lambda^4 = 0 \tag{4}$$

koje je upotrijebio Milašinović [6] u problemu bifurkacijske stabilnosti ploča.

### 2.2. Formulacija harmonijski spojene konačne trake

Bitna značajka geometrijske nelinearnosti jest ta da jednadžbe ravnoteže moraju biti napisane s obzirom na deformiranu geometriju - koja se ne zna unaprijed. Prvi korak u traženju ravnotežnog stanja je određivanje ukupne potencijalne energije konstrukcije u funkciji globalnih stupnjeva slobode. Korake u HSMKT je detaljno prikazao Milašinović [3]. Ukupna potencijalna energija trake je označena sa  $\Pi$  i izražena u odnosu na lokalne generalizirane koordinate.

$$\begin{aligned} \Pi = U + W = (U_e + U_s) + W = & \left( \frac{1}{2} \int q^T B_{AB}^T AB_{AB} q dA + \frac{1}{2} \int q^T B_{DB}^T AB_{DB} q dA \right) + \\ & + \left[ \frac{1}{8} \int q^T B_{WB}^T W^T B_{WB} AB_{WB} q dA + \frac{1}{4} \int q^T B_{WB}^T W^T B_{WB} AB_{WB} q dA + \frac{1}{4} \int q^T B_{WB}^T W^T B_{WB} AB_{WB} q dA \right] + \\ & + \left[ \frac{1}{8} \int q^T B_{UB}^T U^T B_{UB} AB_{UB} q dA + \frac{1}{4} \int q^T B_{UB}^T U^T B_{UB} AB_{UB} q dA + \frac{1}{4} \int q^T B_{UB}^T U^T B_{UB} AB_{UB} q dA \right] + \\ & + \left[ \frac{1}{4} \int q^T B_{UB}^T AB_{UB} q dA + \frac{1}{4} \int q^T B_{WB}^T AB_{WB} q dA + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \int q^T B_{WB}^T W^T B_{WB} AB_{WB} q dA + \frac{1}{8} \int q^T B_{UB}^T U^T B_{UB} AB_{UB} q dA \right. \\ & \left. - \int q^T C^T p dA \right] \tag{5} \end{aligned}$$

Rezultati množenja membranskog djelovanja i savijanja u prvoj zagradi jednadžbe (5) jednoznačno su određeni i razdvojeni, dok su oni u drugoj [relevantni su samo članovi nelinearni po  $w$ ] i trećoj zagradi {nelinearni članovi poput kvadratnih derivacija od  $u_0$  nisu zanemareni} funkcije pomaka. Prema tome, membransko djelovanje i savijanje su harmonijski spregnuti na mnogo načina.

Blokovi osnovne i geometrijske matrice krutosti su, redom:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{uu} &= \int B_{AB}^T AB_{AB} dA, \tilde{K}_{ww} = \int B_{DB}^T DB_{DB} dA, \\ \tilde{K}_{uw} &= \int B_{WB}^T W^T G_{WB} AB_{WB} dA, \tilde{K}_{wu} = \int B_{UB}^T U^T G_{UB} AB_{UB} dA, \tilde{K}_{uu} = \int G_{WB}^T WB_{WB} dA, \\ \tilde{K}_{ww} &= \int B_{UB}^T U^T G_{UB} AB_{UB} dA, \tilde{K}_{uu} = \int G_{UB}^T UB_{UB} dA, \tilde{K}_{uw} = \int B_{WB}^T W^T G_{WB} AB_{WB} dA, \tilde{K}_{wu} = \int B_{UB}^T U^T G_{UB} AB_{UB} dA, \\ \tilde{K}_{uu} &= \int B_{WB}^T W^T G_{WB} AB_{WB} dA, \tilde{K}_{ww} = \int B_{UB}^T U^T G_{UB} AB_{UB} dA, \tilde{K}_{uw} = \int B_{WB}^T W^T G_{WB} AB_{WB} dA, \tilde{K}_{wu} = \int B_{UB}^T U^T G_{UB} AB_{UB} dA. \end{aligned} \tag{6}$$

Zatim se uvode deformacijske matrice:

$$\begin{aligned} B_{u1} &= L_1 A_1, B_{u2} = L_2 A_2, B_{u3} = L_3 A_3, B_{u4} = L_4 A_4, B_{u5} = L_5 A_5, \\ B_{w1} &= L_6 A_6, B_{w2} = L_7 A_7, B_{w3} = L_8 A_8, B_{w4} = L_9 A_9, B_{w5} = L_{10} A_{10}, \end{aligned} \tag{7}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} -\partial^2/\partial x^2 \\ -\partial^2/\partial y^2 \\ -2\partial^2/\partial x \partial y \end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ 0 \\ \partial/\partial y \end{bmatrix}, L_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial x \end{bmatrix}, \\ A_1 &= \begin{bmatrix} A_1^u & 0 \\ 0 & A_1^w \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} q^u \\ q^w \end{bmatrix}, \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1^u & 0 \\ 0 & A_1^w \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} q^u & 0 \\ 0 & q^w \end{bmatrix}, \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} A_2^u & 0 \\ 0 & A_2^w \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} q^u & 0 \\ 0 & q^w \end{bmatrix}, \\ G_1 &= B_{AB}^T AB_{AB}, G_2 = B_{DB}^T DB_{DB}, G_3 = B_{WB}^T W^T G_{WB} AB_{WB}, G_4 = B_{UB}^T U^T G_{UB} AB_{UB}, G_5 = B_{WB}^T W^T G_{WB} AB_{WB}, G_6 = B_{UB}^T U^T G_{UB} AB_{UB}. \end{aligned} \tag{8}$$

Geometrijska matrica krutosti konstrukcije formira se zbrajanjem preklapljenih članova matrica sastavnih traka, na isti način na koji se osnovna matrica krutosti konstrukcije formira zbrajanjem članova osnovnih matrica

traka, korištenjem matrice transformacije između lokalnog i globalnog pomaka. Ravne trake uvijek zadržavaju svoja četiri stupnja slobode po čvornoj liniji i potrebna je samo standardna transformacija koja se koristi u analizi ravnih okvira.

### 2.3. Jednadžbe stabilnosti

Jednadžbe stabilnosti se izvode iz principa virtualnog rada i metoda deformacijske energije. U cilju dobivanja jednadžbi stabilnosti iz varijacijskih veza, pozvat ćemo se na načelo o stacionarnosti potencijalne energije. Prema načelu o stacionarnosti potencijalne energije, nužan uvjet ravnoteže u bilo kojem stanju jest taj da je varijacija ukupne potencijalne energije promatrane konstrukcije jednaka nuli, te imamo sljedeću relaciju:

$$\delta \Pi = 0 \tag{9}$$

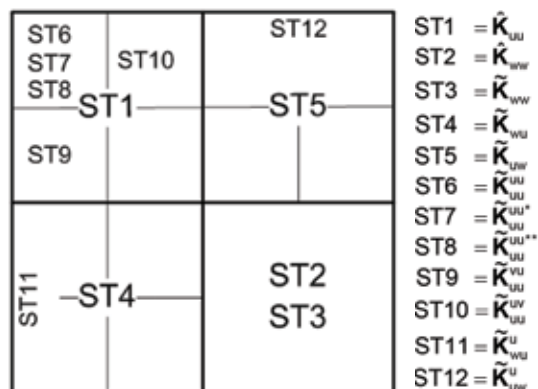
Iz jednadžbe (9) možemo zaključiti da je, ako se konstrukciji zadaju mali virtualni pomaci, ravnoteža i dalje prisutna ako je prirast ukupne potencijalne energije konstrukcije  $\delta \Pi$  jednak nuli. Jednadžba (9) je osnova za dobivanje varijacijske jednadžbe ravnoteže konstrukcije, koja vrijedi i za prijekritična i poslijekritična stanja deformacije. Jednadžba (9) je zadovoljena za proizvoljne vrijednosti varijacija parametara  $\delta q_m^T$ . Prema tome imamo sljedeće uvjete koji moraju biti zadovoljeni za bilo koji harmonik  $m$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_m^T} = 0 \tag{10}$$

Zatim izračunavamo derivacije ukupne potencijalne energije trake i konačno dobivamo nehomogeni i nelinearni sustav algebarskih jednadžbi, koje su tražene jednadžbe stabilnosti:

$$\begin{aligned} (\tilde{K}_{uu} + \tilde{K}_{ww}) + \left[ \frac{1}{2} \tilde{R}_{uw} q + \frac{1}{2} \tilde{R}_{wu} q + \frac{1}{4} \tilde{R}_{uu} q \right] + \\ + \left[ \frac{1}{2} \tilde{R}_{uw}^* q + \frac{3}{4} \tilde{R}_{uw}^{**} q + \frac{3}{4} \tilde{R}_{uw}^{***} q + \frac{1}{4} \tilde{R}_{uu}^* q + \frac{1}{2} \tilde{R}_{uu}^* q + \frac{1}{4} \tilde{R}_{uu}^* q + \frac{1}{4} \tilde{R}_{uu}^* q \right] - q = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Možemo vizualizirati formiranje matrice krutosti trake, koja se sastoji od dvanaest blok-matrica. Postavljanje blok-matrica u osnovnu/geometrijsku matricu krutosti svake trake obavlja se prema shemi prikazanoj na slici 2.



Slika 2. Konstruiranje matrice krutosti trake

### 2.4. Rješenje nelinearnih jednadžbi stabilnosti

Za ravnotežu, načelo o stacionarnosti potencijalne energije konstrukcije zahtijeva

$$\mathbf{R} = \partial\Pi/\partial\mathbf{q}^T = [\bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}]\mathbf{q} - \mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{12}$$

gdje je  $\Pi$  funkcija pomaka  $\mathbf{q}$ .  $\mathbf{R}$  predstavlja vektor rezidualnih sila, koji je općenito različit od nule za neki približan vektor pomaka  $\mathbf{q}_0$  (indeks 0 označava staru vrijednost). Pretpostavlja se da je bolja aproksimacija dana s:

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_0 + \delta_0 \tag{13}$$

gdje indeks  $n$  označava novu vrijednost. Taylorov izraz za jednadžbu (12) daje

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}(\mathbf{q}_0 + \delta_0) = \mathbf{R}(\mathbf{q}_0) + \bar{\mathbf{K}}_0\delta_0 + \dots = \mathbf{R}_0 + \bar{\mathbf{K}}_0\delta_0 + \dots, \tag{14}$$

gdje je  $\bar{\mathbf{K}}_0 = \partial\mathbf{R}/\partial\mathbf{q}$  matrica druge derivacije od  $\Pi$ , izračunata za  $\mathbf{q}_0$ , (odnosno tangenta matrica krutosti konstrukcije (TMKK) ili hesian funkcionalna matrica). Postavljanjem jednadžbe (14) na nulu i uzimanjem u obzir samo linearnih članova u  $\delta_0$  dobiva se standardni izraz za Newton-Raphsonovu iteraciju:

$$\delta_0 = -\bar{\mathbf{K}}_0^{-1}\mathbf{R}_0 \tag{15}$$

Prema ovom pristupu, u daljnjim iteracijama dobivamo

$$\delta_n = \bar{\mathbf{K}}_n^{-1}\mathbf{R}_n \tag{16}$$

gdje je  $\bar{\mathbf{K}}_n = \partial\mathbf{R}/\partial\mathbf{q}$  za  $\mathbf{q}_n$ . Iz Newton-Raphsonove metode je očito da TMKK mora biti invertirana i ažurirana u svakom koraku iteracije. Postupak se ponavlja do zadovoljenja kriterija konvergencije, tj.

$$\left( \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\mathbf{R}_i^T)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\mathbf{Q}_i^T)^2}} \right) \cdot 100 \leq \varepsilon \tag{17}$$

gdje je  $N$  ukupan broj čvornih linija razložene konstrukcije, a  $rt$  određuje broj iteracije. Ovaj kriterij označava da se konvergencija događa kada norma rezidualnih sila postane manja od neke unaprijed definirane vrijednosti  $\varepsilon$ .

Osim toga, blokovi osnovne i geometrijske TMKK su:

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{xx} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{yy} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2\bar{\mathbf{K}}_{xy} \\ 1/2\bar{\mathbf{K}}_{xy} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/2\bar{\mathbf{K}}_{xx}'' + 3/2\bar{\mathbf{K}}_{yy}'' + 3/2\bar{\mathbf{K}}_{xy}'' & 1/2\bar{\mathbf{K}}_{xx}'' \\ 1/2\bar{\mathbf{K}}_{xy}'' & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/2\bar{\mathbf{K}}_{xy}'' \\ 1/2\bar{\mathbf{K}}_{xy}'' & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Uspoređujući ove izraze s jednadžbom (11), očito je da osnovna matrica krutosti ostaje nepromijenjena, dok geometrijska matrica krutosti postaje simetrična.

### 2.5. Formiranje blokova matrice krutosti

Kao što je navedeno u odjeljku 2.2, razvijeni HSMKT pristup se primjenjuje za dobivanje jednadžbi stabilnosti. Pristup uključuje niz simboličkih proračuna. Posebice simbolička integracija energetskih izraza svake trake može zahtijevati dugotrajan proračun na računalu i memorijske resurse kada se koristi veliki broj članova reda. Za učinkovitiju primjenu HSMKT formulacije, vrijednosti integrala koji se koriste za proračun blokova geometrijske matrice krutosti svake trake mogu se izračunati jednom, neovisno o duljini određene trake, te pohraniti u memoriji za kasnije korištenje [3]. Elementi matrica svojstava  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{D}$  za ortotropne ploče su:

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{E_x}{1-\mu_x\mu_y}, K_y = \frac{E_y}{1-\mu_x\mu_y}, K_1 = \frac{\mu_y E_x}{1-\mu_x\mu_y} = \frac{\mu_x E_y}{1-\mu_x\mu_y}, K_{xy} = G, \\ A_{11} &= K_x t, A_{22} = K_y t, A_{12} = K_1 t, A_{66} = K_{xy} t, \\ D_{11} &= K_x \frac{t^3}{12}, D_{22} = K_y \frac{t^3}{12}, D_{12} = K_1 \frac{t^3}{12}, D_{66} = K_{xy} \frac{t^3}{12} \end{aligned} \tag{20}$$

### 2.6. Statičko izvijanje

Gubitak stabilnosti statičke ravnoteže konstrukcija izloženih konzervativnim opterećenjima općenito je poznat kao statičko izvijanje konstrukcije. Kad je riječ o konzervativnim sustavima, princip o minimumu ukupne potencijalne energije može se primijeniti za ispitivanje stabilnosti konstrukcije (statičke ravnoteže su ekstremi ukupne potencijalne energije). Hesian funkcionalna matrica u odnosu na lokalne stupnjeve slobode označena je kao tangenta matrica krutosti svake trake, tj.

$$\bar{\mathbf{K}} = [\bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}] \tag{21}$$

Stabilnost ravnotežnih stanja konzervativnih sustava primjenom HSMKT može se utvrditi gledajući vlastite vrijednosti TMKK sa  $n$  čvornih linija, koje su sve realne, budući da je tangenta matrica krutosti trake simetrična matrica. Neka  $\lambda_i$  označava  $i$ -tu svojstvenu vrijednost od

$$\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}_{(DOF \times n) \times (DOF \times n)} \tag{22}$$

Na temelju Lagrange-Dirichletova i Ljapunovljeva teorema [9, 10] može se zaključiti da je ravnotežno stanje stabilno ako su sve  $\lambda_i > 0$ , dok je ravnotežno stanje nestabilno ako su jedna ili više  $\lambda_i < 0$ . Ako je u nekom ravnotežnom stanju tijekom nanošenja opterećenja jedan ili više  $\lambda_i = 0$ , to ravnotežno stanje se označava kao kritično stanje. Statičko izvijanje odnosi se općenito na slučaj kad se, počevši od nekog stabilnog stanja, kritično stanje postiže dodavanjem opterećenja. Nadalje, bez gubitka općenitosti, također se može pretpostaviti da ono ovisi o jednom skalaru  $P$ , koji određuje veličinu (ili raspodjelu) vanjskih konzervativnih opterećenja  $\mathbf{Q}$  koja djeluju na konstrukciju.

Tada se kritično stanje i odgovarajuće opterećenje obilježavaju

$$\{q^c\}_{DOFs(r)} \text{ i } P^c \quad (23)$$

redom. U kritičnom stanju slijedi:

$$\mathbf{K}_{(DOFs(r))} \big|_{q^c, P^c} \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (24)$$

gdje stupac  $\mathbf{z}$  označava mod izvijanja. U principu, jednadžba (24) predstavlja nelinearni problem vlastitih vrijednosti, budući da  $\mathbf{K}$  (općenito) ovisi na nelinearan način o globalnim stupnjevima slobode  $q_i$ , koji pak mogu ovisiti na nelinearan način o opterećenju  $P$ , kao što je definirano u jednadžbama ravnoteže, jednadžbe (11).

U principu, jednadžba (24) se rješava rješavanjem jednadžbi (11) za različita opterećenja  $P$ , primjerice nekom vrstom numeričke iterativne sheme praćenja putanje opterećenja (vidjeti [3]), dok se istovremeno prate vlastite vrijednosti TMKK matrice, opisane jednadžbom (22). Izvijanje se javlja kada matrica postaje singularna.

### 2.7. Membranske sile i momenti savijanja harmonijski spojene konačne trake

Tri komponente sila ( $N_x = \sigma_x$ ,  $N_y = \sigma_y$ ,  $N_{xy} = \tau_{xy}$ ) i tri komponente momenata ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ) povezane su s deformacijama kroz materijalna svojstva trake. U ovoj formulaciji se pretpostavlja općenitiji slučaj ortotropnih svojstava:

$$\mathbf{N} = \sum_{m=1}^r \hat{\mathbf{H}}_{1mm} q_{1m} + 1/2 \sum_{m=1}^r \hat{\mathbf{H}}_{2mm} q_{2m} + 1/2 \sum_{m=1}^r \hat{\mathbf{H}}_{3mm} q_{3m}, \quad \mathbf{M} = \sum_{m=1}^r \hat{\mathbf{H}}_{4mm} q_{4m} \quad (25)$$

gdje su:

$$\hat{\mathbf{H}}_{1mm} = \mathbf{A} \mathbf{B}_{11m}, \quad \hat{\mathbf{H}}_{2mm} = \mathbf{A} \mathbf{B}_{21m} \mathbf{W} \mathbf{B}_{22m}, \quad \hat{\mathbf{H}}_{3mm} = \mathbf{A} \mathbf{B}_{31m} \mathbf{U} \mathbf{B}_{32m}, \quad \hat{\mathbf{H}}_{4mm} = \mathbf{D} \mathbf{B}_{41m} \quad (26)$$

Jednadžbe (25) se mogu napisati kako slijedi:

$$\mathbf{N} = \sum_{m=1}^r \hat{\mathbf{N}}_{1m} + 1/2 \sum_{m=1}^r \hat{\mathbf{N}}_{2m} + 1/2 \sum_{m=1}^r \hat{\mathbf{N}}_{3m}, \quad \mathbf{M} = \sum_{m=1}^r \hat{\mathbf{M}}_{4m} \quad (27)$$

Množenje daje:

$$\hat{\mathbf{N}}_{1m} = t \begin{bmatrix} \frac{dN_x^c}{dx} Y_{mm} E_x / (1-\mu_x \mu_y) q_{1m}^c + N_x^c \frac{dY_{mm}^c}{dy} \mu_x E_x / (1-\mu_x \mu_y) q_{1m}^c \\ \frac{dN_y^c}{dx} Y_{mm} E_y / (1-\mu_x \mu_y) q_{1m}^c + N_y^c \frac{dY_{mm}^c}{dy} E_y / (1-\mu_x \mu_y) q_{1m}^c \\ N_x^c \frac{dY_{mm}^c}{dy} G q_{1m}^c + \frac{dN_y^c}{dx} Y_{mm} G q_{1m}^c \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{M}}_{2m} = (t^2/12) \begin{bmatrix} -\frac{d^2 N_x^c}{dx^2} Y_{mm} E_x / (1-\mu_x \mu_y) q_{2m} - N_x^c \frac{d^2 Y_{mm}^c}{dy^2} \mu_x E_x / (1-\mu_x \mu_y) q_{2m} \\ -\frac{d^2 N_y^c}{dx^2} Y_{mm} E_y / (1-\mu_x \mu_y) q_{2m} - N_y^c \frac{d^2 Y_{mm}^c}{dy^2} E_y / (1-\mu_x \mu_y) q_{2m} \\ -2 \frac{dN_x^c}{dx} \frac{dY_{mm}^c}{dy} G q_{2m} \end{bmatrix} \quad (28)$$

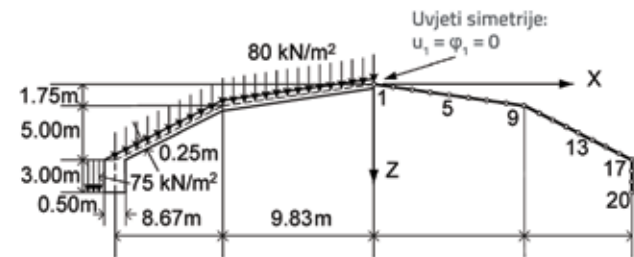
$$\hat{\mathbf{N}}_{3m} = t \begin{bmatrix} \frac{dN_x^c}{dx} Y_{mm} E_x / (1-\mu_x \mu_y) q_{3m} + \frac{dN_x^c}{dx} Y_{mm} q_{3m} + N_x^c \frac{dY_{mm}^c}{dy} \mu_x E_x / (1-\mu_x \mu_y) q_{3m} + N_x^c \frac{dY_{mm}^c}{dy} q_{3m} \\ \frac{dN_y^c}{dx} Y_{mm} E_y / (1-\mu_x \mu_y) q_{3m} + \frac{dN_y^c}{dx} Y_{mm} q_{3m} + N_y^c \frac{dY_{mm}^c}{dy} E_y / (1-\mu_x \mu_y) q_{3m} + N_y^c \frac{dY_{mm}^c}{dy} q_{3m} \\ N_x^c \frac{dY_{mm}^c}{dy} G q_{3m} + \frac{dN_y^c}{dx} Y_{mm} G q_{3m} + \frac{dN_x^c}{dx} Y_{mm} G q_{3m} + N_y^c \frac{dY_{mm}^c}{dy} q_{3m} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{N}}_{1m} = t \begin{bmatrix} \frac{dN_x^c}{dx} Y_{mm} E_x / (1-\mu_x \mu_y) q_{1m}^c + N_x^c \frac{dY_{mm}^c}{dy} \mu_x E_x / (1-\mu_x \mu_y) q_{1m}^c \\ \frac{dN_y^c}{dx} Y_{mm} E_y / (1-\mu_x \mu_y) q_{1m}^c + N_y^c \frac{dY_{mm}^c}{dy} E_y / (1-\mu_x \mu_y) q_{1m}^c \\ N_x^c \frac{dY_{mm}^c}{dy} G q_{1m}^c + \frac{dN_y^c}{dx} Y_{mm} G q_{1m}^c \end{bmatrix} \quad (28)$$

Linearni vektori  $\hat{\mathbf{N}}_{1m}$  i  $\hat{\mathbf{M}}_{2m}$  su jednoznačno definirani. Nelinearni vektor  $\hat{\mathbf{N}}_{3m}$  je u potpunosti u skladu s pristupom von Karmana, koji zanemaruje nelinearne članove u odnosima deformacija i pomaka za napone uslijed savijanja, ali ne i za membranska naprezanja. U Green-Lagrangeovom pristupu se dobiva i nelinearni vektor  $\hat{\mathbf{N}}_{3m}$ .

### 3. Utjecaj geometrijske nelinearnosti na duže i kraće ljsuke

Složenice tipičnog presjeka, prikazanog na slici 3, analizirane su za različite raspone: 70, 74, 78, 82, 86, 90 i 100 m te je uočena potpuna podudarnost s rezultatima linearne analize koje su dobili Cheung i Tam [1]. Kako bi se naglasio utjecaj geometrijske nelinearnosti na duže i kraće ljsuke, složenice istog presjeka ovdje su ponovno analizirane za raspodijeljeno opterećenje koje je tisuću puta veće nego u [1].



Slika 3. Dimenzije presjeka složenice i idealizacija trakama

Raspodijeljena opterećenja u Z-pravcu su podijeljena u ukupno deset koraka. Budući da je deformacija simetrična u odnosu na uzdužnu os, analizira se samo polovica konstrukcije. U svim primjerima su uzeti Youngov modul elastičnosti za beton  $E=35.820.000 \text{ kN/m}^2$  i Poissonov koeficijent nula. Usporedna analiza je provedena za linearna, von Karmanova i Green-Lagrangeova predviđanja.

Uzajamna veza između putanje opterećenja i vlastitih vrijednosti TMKK prikazana je na slici 4. Za ilustraciju statičke ravnoteže u kontekstu stabilnosti, dijelovi krivulje koji odgovaraju stanju stabilne ravnoteže iscrtani su punom linijom, dok su dijelovi koji odgovaraju nestabilnim ravnotežnim stanjima prikazani isprekidanom linijom. Analiza utjecaja opterećenja na vlastite vrijednosti TMKK predočena je za sve raspone i različit broj članova reda usvojenih u proračunu. Za kraću ljsuku (70 m) je stabilna ravnoteža, prema predviđanjima i von Karmana i Green-Lagrangea, zabilježena za sve razine opterećenja. Pokazano je da opterećenje i duljina raspona imaju značajan utjecaj na stanje ravnoteže. U Green-Lagrangeovim predviđanjima, pri povećanju duljine konstrukcije dolazi do pada vlastitih vrijednosti TMKK.

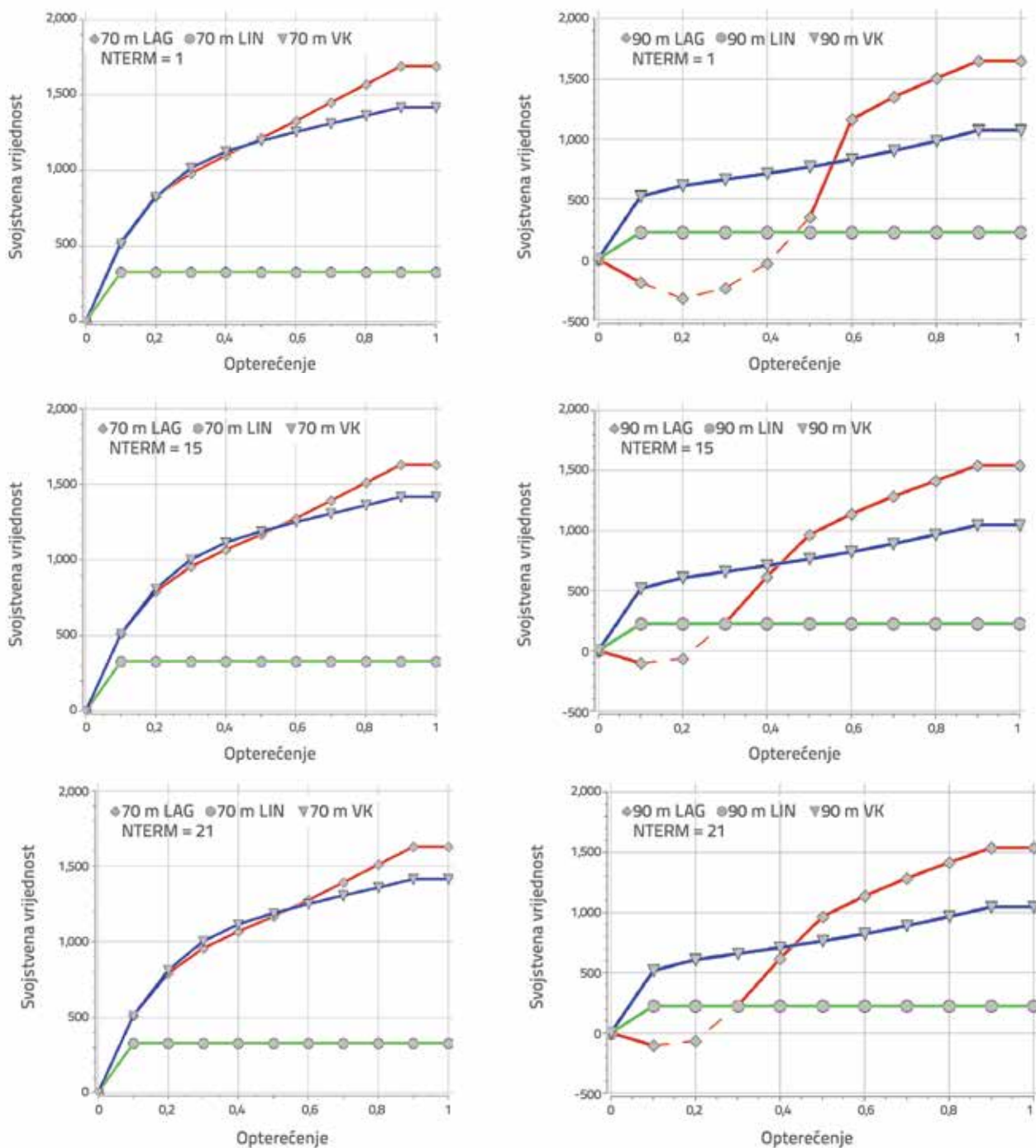
Primijećeno je da se za male vrijednosti opterećenja na dužoj ljsuci (90 m) pojavljuje područje nestabilnosti, bilo da se koristi samo jedan član ili više članova reda. Međutim, s porastom opterećenja primjetan je porast vlastitih vrijednosti TMKK, te područja nestabilnosti nestaju.

Na osnovi geometrijskih odnosa nelinearne teorije prizmatične ljsuke u sklopu HSMKT odredili smo velike pomake ( $w$ ,  $u$  i  $j$ ), unutarnje sile i momente za von Karmanov i za Green-

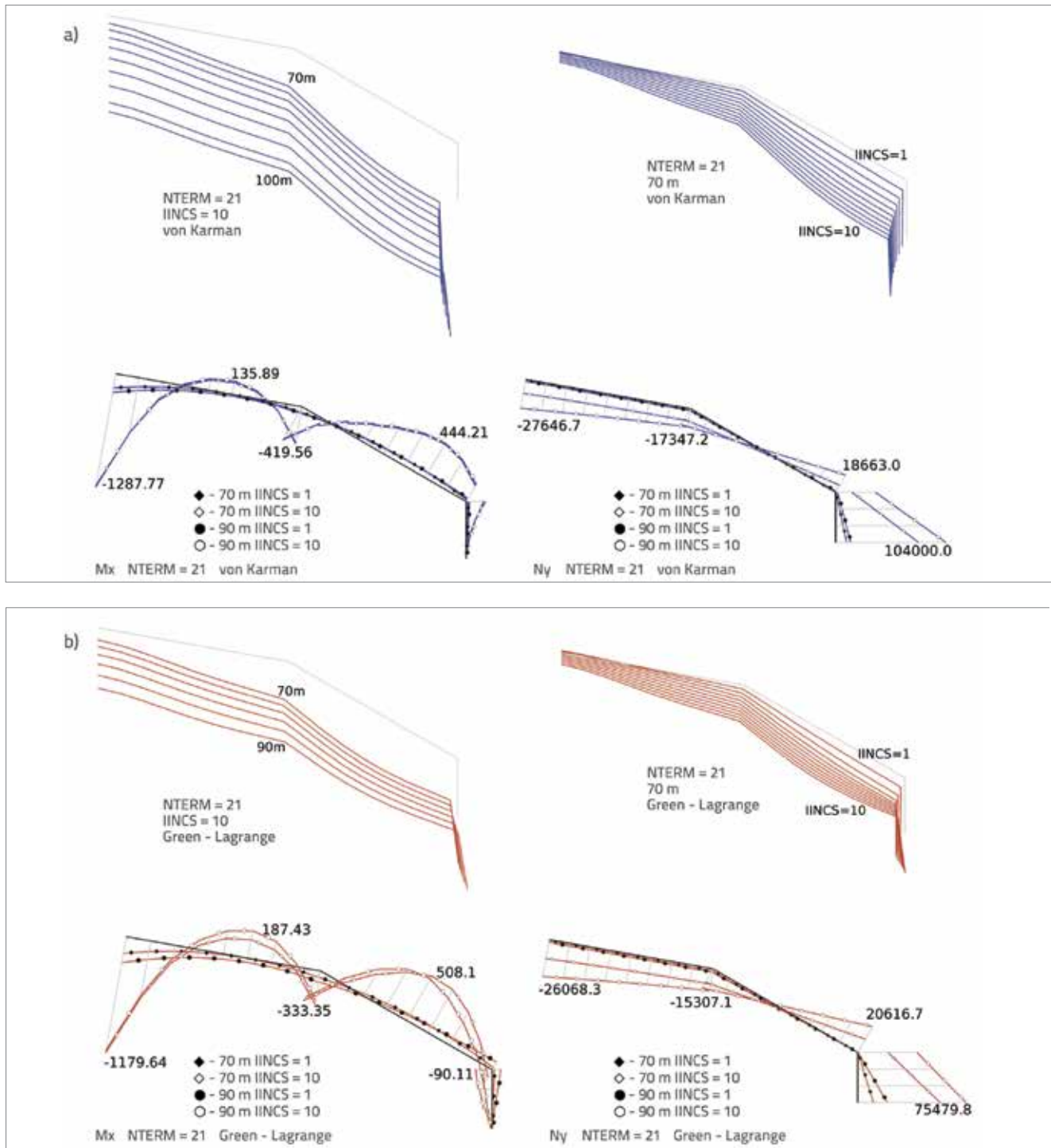
Lagrangeov pristup, uzimajući u obzir različite duljine ljsuke i razine opterećenja.

Početne i prijelazne konfiguracije ljsuke nacrtane na slici 5, gdje su prikazani svi pomaci, pokazuju važnost duljine i promjene opterećenja u oba predviđanja.

Na slici 5., razdiobe membranske sile  $N_y$  ( $\sum m=1...21$ ) duž poprečnog presjeka u sredini raspona prikazane su za razine opterećenja 8 kN/m<sup>2</sup> (IINCS=1) i 80 kN/m<sup>2</sup> (IINCS=10) redom,



Slika 4. Varijacija vlastitih vrijednosti TMKK s intenzitetom opterećenja za ulaze s različitim brojem članova reda

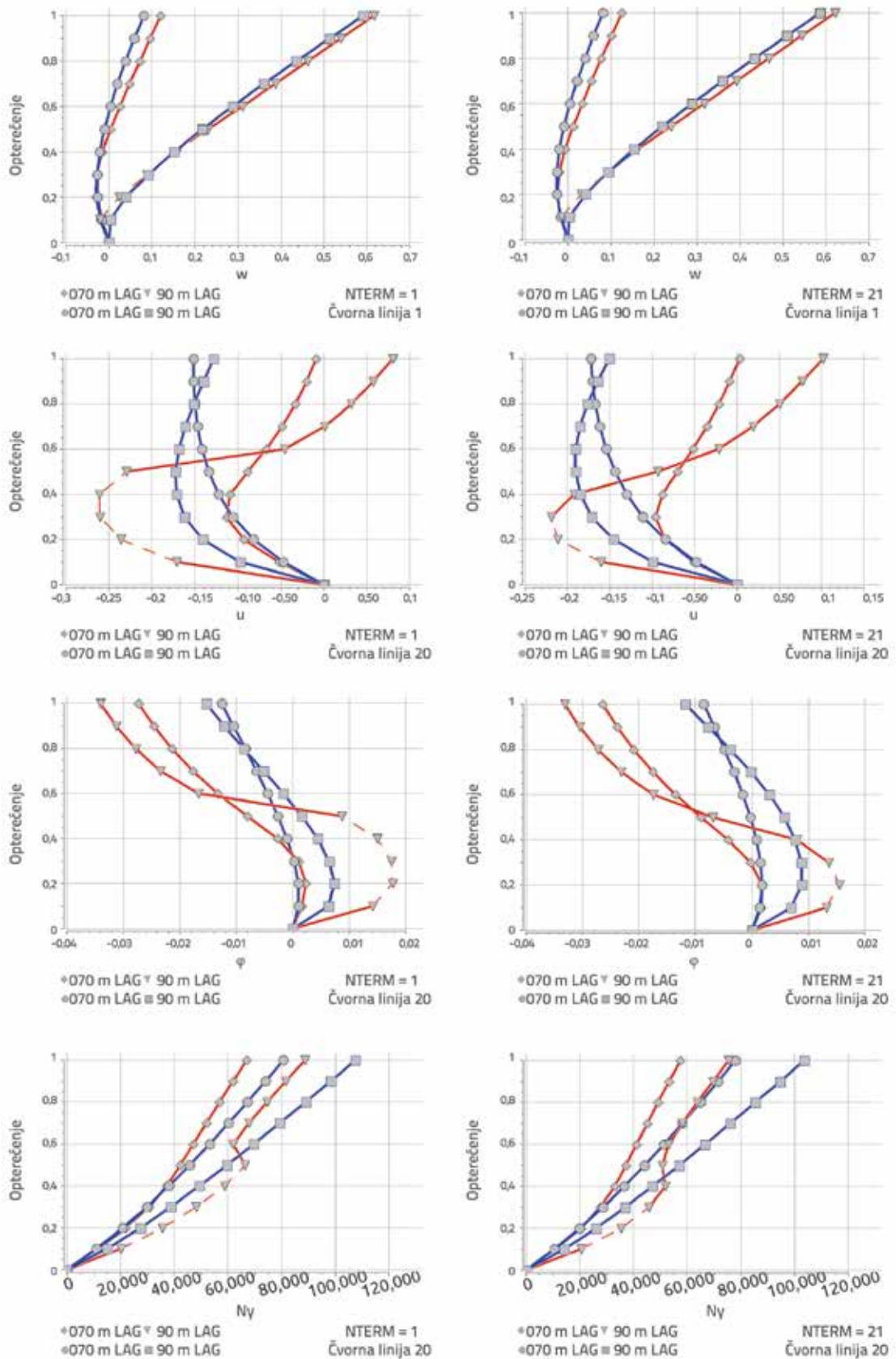


Slika 5. Početne i završne konfiguracije i unutarnje sile duž poprečnog presjeka u sredini raspona za: a) von Karmanov; b) Green-Lagrangeov pristup

za oba pristupa. Utjecaj nelinearnog ponašanja veoma je izražen u razlici između rezultata na posljednjoj razini opterećenja za ljusku raspona 90 m. Postignuta Green-Lagrangeova sila (75479.8 kN) u točki ukrute (NPOIN=20) bila je 27,4 % niža od predviđene von Karmanove sile (104.000 kN), što odražava utjecaj nelinearnih članova od pomaka  $u$  kroz membransko djelovanje u gredama za ukrućenje ( $b/$

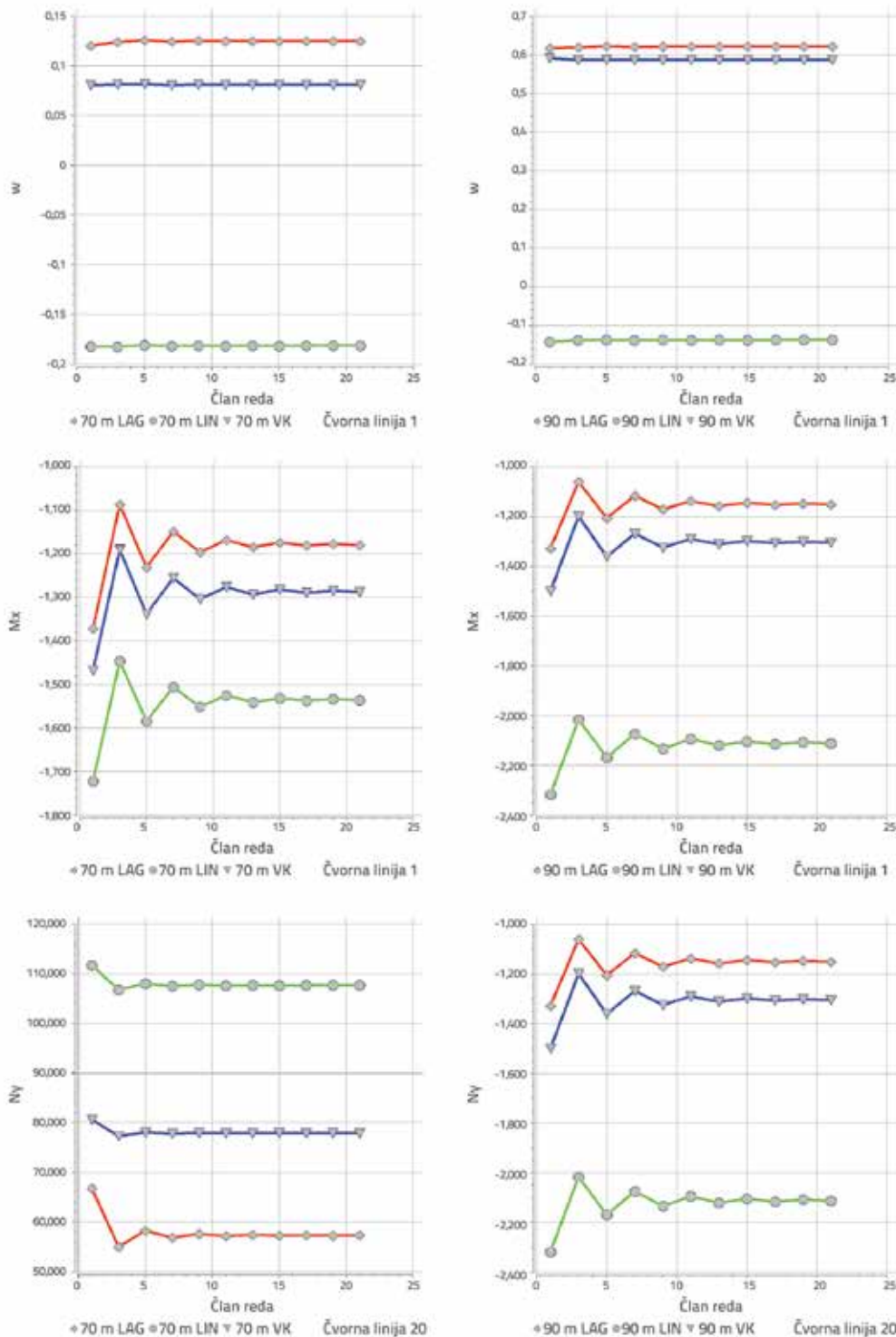
$h=0.5/3$  m). Utjecaj nelinearnog ponašanja je manje izražen u tjemenu ljuske (NPOIN=1), jer je ovdje manja razlika (5.7 %) između sila.

Raspodjele momenata  $M_x$  ( $\sum m=1...21$ ) duž poprečnog presjeka u sredini raspona također su prikazane na slici 5, te se uočava slična razlika između rezultata von Karmanovog i Green-Lagrangeovog pristupa.



Slika 6. Krivulje opterećenje-pomak ( $w, u$  i  $\varphi$ ) i opterećenje-membranska sila  $N_y$  sa područjima nestabilnosti





Slika 7. HSMKT konvergencija središnjeg pomaka  $w$ , središnjeg momenta  $M_x$  i membranske sile  $N_y$  u točki ukrute (razina opterećenja  $80 \text{ kN/m}^2$ )

Kao što je prikazano na slici 6., vrijednosti pomaka i unutarnjih sila dobivenih na prvoj razini opterećenja ( $8 \text{ kN/m}^2$ ) ljske raspona 70 m praktički su iste za linearno, von Karmanovo i Green-Lagrangeovo predviđanje, jer na toj razini opterećenja ljska ne pokazuje značajno geometrijski nelinearno ponašanje. Analizirali smo ravnotežne putanje i našli sva

područja stabilnosti za ljsku ove duljine, iako vrijednosti središnjeg pomaka  $w$  mijenjaju predznak. Međutim, to nije slučaj za ljske većeg raspona.

Za ljsku raspona 90 m u Green-Lagrangevom proračunu uočene su četiri regije nestabilnosti pri korištenju samo jednog člana reda i dvije korištenjem 21 harmonika. U

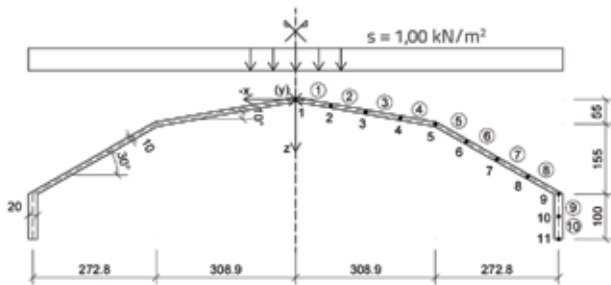
područjima nestabilnosti pomak  $u$  i rotacija  $j$  dosežu ekstremne vrijednosti u točkama ukrute, zatim mijenjaju predznak i ljsuska naglo skače u stabilno stanje ravnoteže pod većim razinama opterećenja. Naravno, ta područja su u vezi s izvijanjem. Međutim, ovaj problem je drugačiji od izvijanja ploča pod aksijalnim opterećenjem jer uključuje vrlo važno membransko ponašanje u prije izvijajućim konfiguracijama i važnu spregu membranskog ponašanja i savijanja (i torzije) u poslije izvijajućem području. Ljuska se izvija nakon dostizanja ekstremnih vrijednosti pomaka u točkama ukruta.

Slika 7. ilustrira iznimno brze monotone konvergencije središnjeg pomaka  $w$  za ljsuske duljine 70 m i 90 m. Očito je da je samo nekoliko članova reda potrebno da bi pomaci konvergirali k točnom odgovoru. Brzina konvergencije središnjih momenata  $M_x$  i membranskih sila  $N_y$  u točki ukrute također je analizirana u posljednjoj razini opterećenja (80 kN/m<sup>2</sup>). Očito je da je 21 član reda (zbrajanjem 21 harmonika, tj. samo 11 neparnih članova) potreban za konvergenciju momenata k točnom odgovoru i 9 članova reda za sile. Konvergencija je nemonotona za obje unutarnje sile.

#### 4. Primjena na stvarne armiranobetonске složenice

Izvedive armiranobetonске složenice različitih duljina i presjeka detaljno je analizirano u radu [11]. Na temelju tih rezultata, ovdje će se ocijeniti važnost utjecaja geometrijske nelinearnosti na stvarne ljsuske s realnim opterećenjem i procijeniti veličina greške koja proizlazi iz pretpostavke malih pomaka ovih konstrukcija.

Analiziraju se armiranobetonске slobodno oslonjene složenice ukupne širine  $B=11.6$  m (slika 8.). Opterećenje je vertikalno, ravnomjerno raspoređeno: vlastita težina konstrukcije  $g$ , težina obloge nagnutih ploča  $Dg=0.5$  kN/m<sup>2</sup> i opterećenje snijegom  $s=1.0$  kN/m<sup>2</sup>. Konstrukcije su izrađene od betona klase C35/45 s armaturom B400.



Slika 8. Presjek, opterećenje i mreža konačnih traka analiziranih složenica

U prvom koraku, analiza složenica različitih raspona, od  $L=5$  m do  $L=100$  m, provedena je primjenom linearne metode konačnih traka (MKT) korištenjem sto članova reda. Primijenjena je simetrija geometrije, opterećenja i uvjeta oslanjanja, pa je numerička analiza provedena samo za

polovicu konstrukcije. Mreža konačnih traka (ukupno 10), njihove oznake i oznake čvornih linija, kao i orijentacija globalnog koordinatnog sustava, prikazani su na slici 8. U ovoj analizi su korišteni modul elastičnosti  $E=34$  GPa i Poissonov koeficijent  $\nu=0$ .

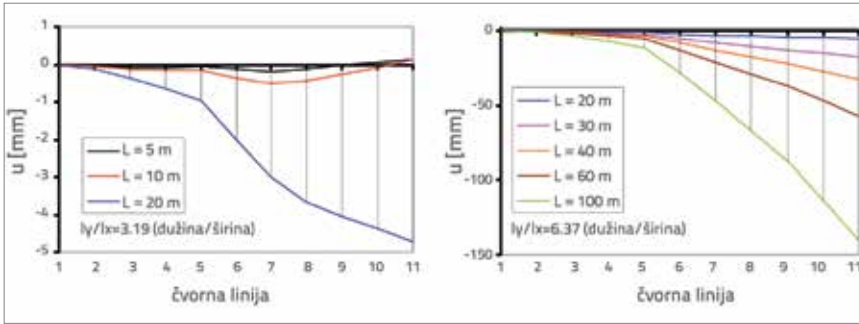
Promatrajući raspodjelu pomaka i napona (slike 9.-11.) uslijed ukupnog uporabnog opterećenja za različite duljine analiziranih složenica, mogu se primijetiti dva različita ponašanja: jedno odgovara "kratkim" konstrukcijama, duljine do  $L=10$  m, s odgovarajućim omjerom dužina/širina pojedinih ploča  $l_y/l_x=3.19$ , a drugo konstrukcijama duljim od  $L=20$  m ( $l_y/l_x=6.37$ ).

Donji rub rubnih greda (čvorna linija 11), za raspane  $L=5$  m i  $L=10$  m, pomiče se prema van (slika 9.), a za sve druge raspane prema unutra (prema osi simetrije presjeka). Zaključno s  $L=20$  m raspodjela horizontalnih pomaka između čvornih linija 5 i 9 je parabolična, dok je za veće raspane gotovo linearna.

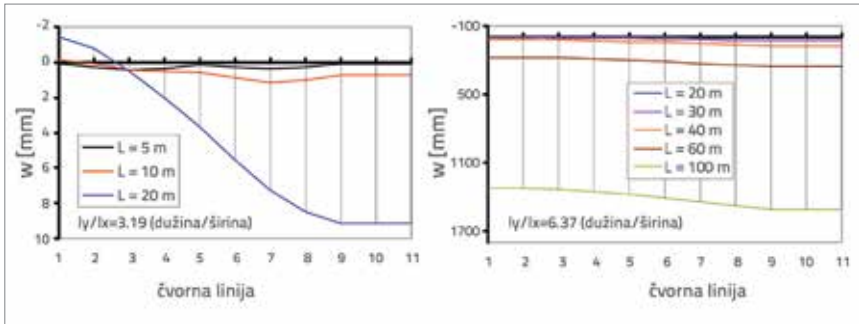
Kod raspona  $L=10$  m i  $L=20$  m, točke blizu osi simetrije presjeka se pomiču prema gore (negativni pomaci). Kod svih drugih duljina, sve točke presjeka imaju pozitivan progib  $w$  (slika 10.). Za raspane do  $L=20$  m maksimalna vrijednost uzdužnog naprežanja u tlačnoj zoni nije postignuta u najvišoj točki presjeka (čvorna linija 1), već malo ispod nje (slika 11.). Povećanjem duljine konstrukcije smanjuje se visina tlačne zone u presjeku. Za vrlo velike raspane ( $L=100$  m) raspodjela uzdužnih naprežanja postaje linearna.

U drugom koraku, primjenjujući HSMKT von Karmanova i Green-Lagrangeova rješenja, izvedena je analiza stabilnosti armiranobetonških složenica, prikazanih na slici 8., za raspane 10, 15, 20, 25 i 30 m [12]. U proračunima je usvojen 31 član reda. Ukupno opterećenje je podijeljeno u osam inkremenata (0.6, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.1 i 0.1). Faktor opterećenja 0.8 odgovara uporabnom opterećenju. Konvergencija se događa kada je norma rezidualnih sila manja ili jednaka 0.1 (točnost 1/1000). Slika 12. pokazuje da utjecaj nelinearnog ponašanja nije značajno izražen u 20 metara dugoj konstrukciji, posebice za razinu opterećenja koja odgovara uporabnom stanju (razlika između rezultata linearne i nelinearne analize je manja od 10%). U ovom primjeru odgovor uvijek uključuje ojačavajuće ponašanje konstrukcije. Tijekom istraživanja usporedili smo HSMKT rezultate s onima dobivenim u ABAQUS-u s 58000 "shell" elemenata [12]. Koristili smo STR13 element koji je jedini element u ABAQUS-ovoj knjižnici namijenjen uporabi za tanke ploče po Kirchhoffovoj teoriji. Taj element modelira proizvoljno velike rotacije, ali samo male deformacije.

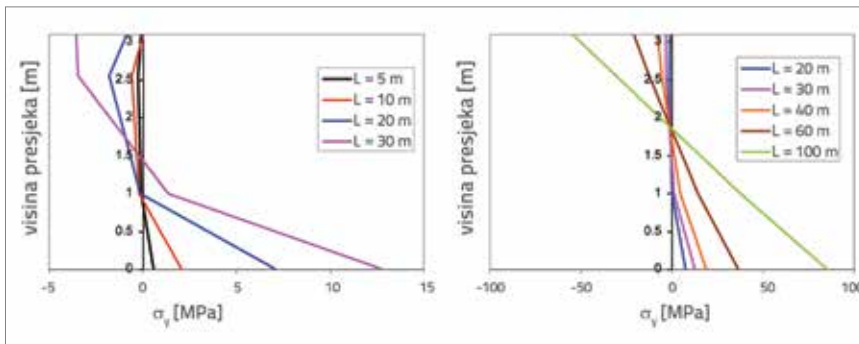
Analiza utjecaja intenziteta opterećenja na vlastite vrijednosti TMKK predočena je za analizirane raspane i 31 član reda usvojen u proračunu (slika 13.). Može se zaključiti da je pretpostavka o malim pomacima u potpunosti opravdana za raspane do 15 m ( $l_y/l_x=4.8$ ). Kod dužih konstrukcija, geometrijski nelinearni efekti su izraženiji čak i za uporabna opterećenja, pa ih ne treba zanemariti.



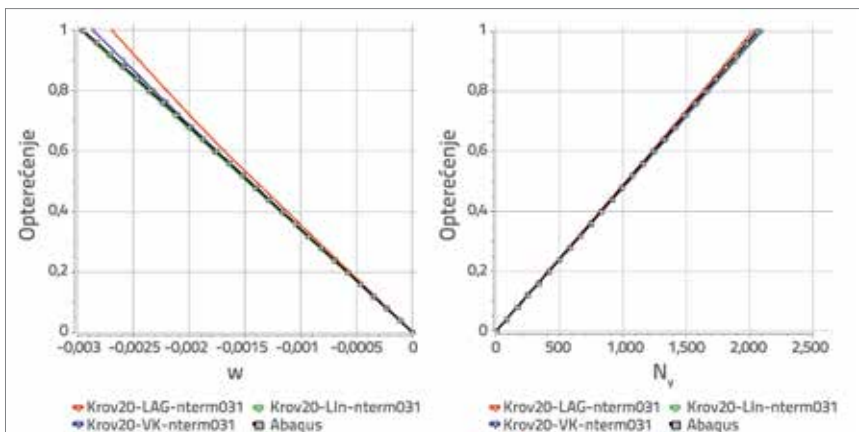
Slika 9. Pomaci u pravcu globalne osi x u sredini raspona



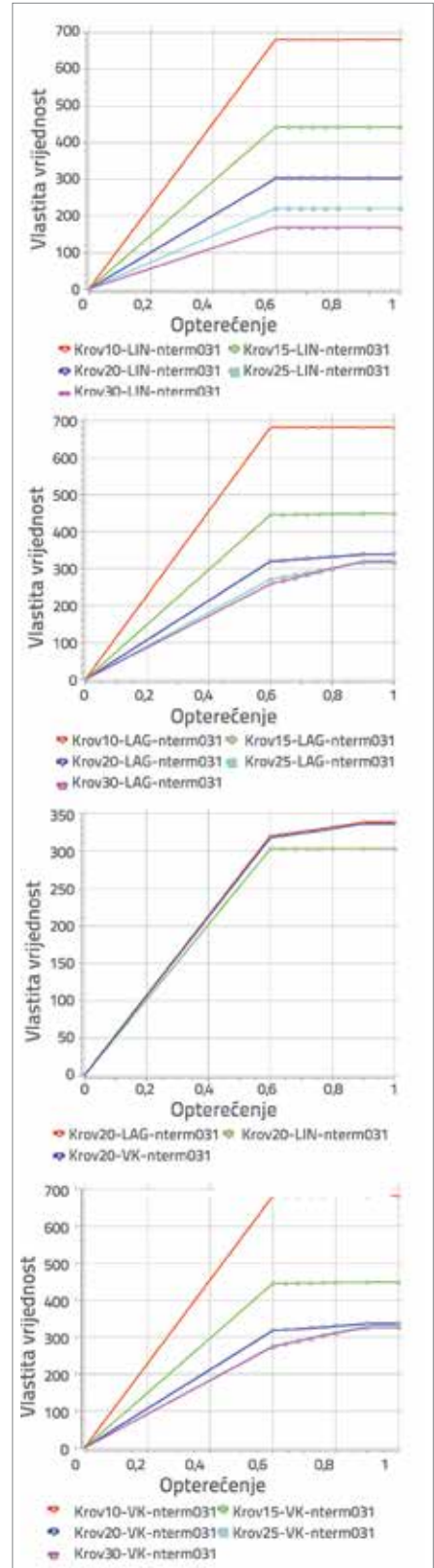
Slika 10. Vertikalni pomaci u sredini raspona



Slika 11. Uzdužno naprezanje  $\sigma_v$  u sredini raspona, po visini presjeka



Slika 12. Varijacija središnjeg progiba w u čvornoj liniji 1 i uzdužne sile  $N_v$  u čvornoj liniji 11 s promjenom intenziteta opterećenja, korištenjem HSMKT



Slika 13. Varijacija vlastitih vrijednosti TMKK s intenzitetom opterećenja

## 5. Zaključak

U ovom radu su prezentirane dvije HSMKT formulacije za analizu naboranih konstrukcija s velikim geometrijskim nelinearnostima, primjenom von Karmanovih i Green-Lagrangeovih geometrijskih veza. Nestabilnost panela, stupova, kutijastih nosača mostova ili bilo koje vrste prizmatične ljuske s velikim omjerom raspona i širine, može biti uzrokovana bilo kojom vrstom opterećenja: uzdužnim tlakom ili čak zatezanjem, savijanjem i torzijskim momentom. Ovdje je predložen jedinstveni kriterij nestabilnosti bilo koje vrste ljuskastih konstrukcija koje se mogu modelirati u okviru HSMKT. Pokazano je da se stabilnost ravnotežnih stanja složena može procijeniti traženjem vlastitih vrijednosti  $I_i$  od TMKK, koje su sve realne budući da je tangenta matrica krutosti trake simetrična matrica. Ravnotežno stanje je stabilno ako su sve  $I_i > 0$ , a nestabilno ako je jedna ili više  $I_i < 0$ . Ako je tijekom nanošenja opterećenja u nekom ravnotežnom stanju jedna ili više  $I_i = 0$ , to ravnotežno stanje se označava kao kritično stanje.

Prema prikazanim rezultatima provedene analize izvedive armiranobetonske složenice, neki zaključci o opravdanosti pretpostavke o malim pomacima mogu se izvesti čak i na osnovi linearne analize. Primijećena su dva različita ponašanja

konstrukcije: ponašanje "kratkih" konstrukcija i onih "dugih". Granica između ta dva ponašanja upućuje na granicu između konstrukcija kod kojih linearna analiza daje rezultate s dovoljnom točnošću i konstrukcija čije nelinearno ponašanje ne može biti zanemareno. Ovo je potvrđeno primjenom geometrijski nelinearne analize. Također se pokazalo da su kod realnih naboranih konstrukcija pod uporabnim opterećenjem, geometrijski nelinearni efekti izraženi samo za velike raspone. HSMKT formulacija se pokazala prikladna za analizu stabilnosti prizmatičnih ljuskastih konstrukcija, zahvaljujući brzim i memorijski ne zahtjevnim proračunima (niskoj cijeni), točnosti i pouzdanosti von Karmanovih i Green-Lagrangeovih predviđanja.

## Zahvala

Rezultati objavljeni u ovom radu su dio istraživačkih projekata: ON 174027 "Računalska mehanika u projektiranju konstrukcija" i TR 36017 "Iskorištavanje nusproizvoda i recikliranih otpadnih materijala u betonskim kompozitima u okviru održivog razvoja izgradnje u Srbiji: istraživanje i procjena utjecaja na okoliš mogućih primjena", podržanih od strane Ministarstva nauke i tehnologije Republike Srbije. Autori zahvaljuju na ovoj potpori.

## LITERATURA

- [1] Cheung, Y.K., Tham, L.G.: *Finite strip method*, CRC Press LLC, 1998.
- [2] Loo, Y.C., Cusens, A.R.: *The finite strip method in bridge engineering*, Alden Press Oxford London and Northampton, 1978.
- [3] Milašinović, D.D.: *The finite strip method in computational mechanics*, Faculties of Civil Engineering: University of Novi Sad, Technical University of Budapest and University of Belgrade, Subotica, Budapest, Belgrade, 1997.
- [4] Dawe, D.J., Lam, S.S.E., Azizian, Z.G.: *Non-linear finite strip analysis of rectangular laminates under end shortening, using classical plate theory*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 35(5), pp. 1087-1110, 1992.
- [5] Milašinović, D.: *Metod konačnih traka u nelinearnoj analizi A/B konstrukcija*, Jugoslavenski časopis za inženjersko modeliranje, 1(2-4), pp. 101-109, 1988.
- [6] Milašinović, D.: *Bifurkaciona stabilnost metodom konačnih traka*, Građevinar, 10, str. 415-417, 1985.
- [7] Milašinović, D.D.: *Geometric non-linear analysis of thin plate structures using the harmonic coupled finite strip method*, Thin-Walled Structures, 49(2), pp. 280-290, 2011.
- [8] Rakić, P.S., Milašinović, D.D., Živanov, Ž., Suvajdžin, Z., Nikolić, M., Hajduković, M.: MPI-CUDA parallelization of a finite-strip program for geometric nonlinear analysis: A hybrid approach, Advances in Engineering Software, 42(5), pp. 273-285, 2011.
- [9] Bažant, Z.P., Cedolin, L.: *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*, Oxford University Press, Oxford, 1991.
- [10] Pignataro, M., Rizzi, N., Luongo, A.: *Stability, bifurcation and postcritical behaviour of elastic structures*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1991.
- [11] Goleš, D.: *Reološko-dinamička analiza armiranobetonskih poliedarskih ljuski*, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Subotica, Univerzitet u Novom Sadu, 2012.
- [12] Milašinović, D.D., Goleš, D., Borković, A., Kukaras, D., Landović, A., Živanov, Z., Rakić, P.: *Rheological-Dynamical Limit Analysis of Reinforced Concrete Folded Plate Structures using the Harmonic Coupled Finite-Strip Method*, in B.H.V. Topping, (Editor), Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology, Civil-Comp Press, Stirlingshire, UK, Paper 158, 2012. doi: 10.4203/ccp.99.158.